



Méthode magnétique appliquée à l'exploration multiéchelle du Bassin de Franceville

Simon Fleury

► To cite this version:

Simon Fleury. Méthode magnétique appliquée à l'exploration multiéchelle du Bassin de Franceville. Géophysique [physics.geo-ph]. Université de Strasbourg, 2011. Français. NNT: . tel-00753300

HAL Id: tel-00753300

<https://theses.hal.science/tel-00753300>

Submitted on 19 Nov 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

École et Observatoire des Sciences de la Terre

Institut de Physique du Globe - UMR 7516

École Doctorale des Sciences de la Terre et de l'Univers

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

DISCIPLINE : GÉOPHYSIQUE INTERNE

Spécialité : Méthodes Potentielles Dominante : Méthode Magnétique

SIMON FLEURY

Méthode magnétique appliquée à l'exploration multi-échelle du Bassin de Franceville

Soutenue publiquement le 27 septembre 2011 pour l'obtention du titre de
Docteur es Sciences de l'Université devant le jury composé de :

J. DYMENT	-	Institut de Physique du Globe, Paris	-	Rapporteur externe
N. FLORSCH	-	Université Pierre et Marie Curie, Paris	-	Rapporteur externe
P. SAILHAC	-	Université de Strasbourg	-	Rapporteur interne
J.P. MILESI	-	AREVA NC, Paris - La Défense	-	Examineur
K. SCHULMANN	-	Université de Strasbourg	-	Examineur
M. MUNSCHY	-	Université de Strasbourg	-	Directeur de thèse

Remerciements

Cette thèse a été réalisée à l'Ecole et Observatoire des Sciences de la Terre (UMR 7516) au sein de l'Université de Strasbourg.

Je remercie AREVA NC pour la bourse qui m'a été octroyée pendant 3 ans et m'a permis de réaliser ce travail.

Je remercie l'Université de Lille I Sciences et Technologies de m'avoir accueilli pendant ma quatrième année de thèse en tant qu'ATER au sein de la FRE 3298 Géosystèmes.

Au moment de mettre un point final à ce manuscrit de thèse, il m'est agréable de penser à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je tiens tout d'abord à remercier, mon directeur de thèse, Marc Munschy de m'avoir ouvert les portes de la recherche scientifique, de m'y avoir donné goût et d'avoir eu confiance en mon travail. De plus, son enthousiasme et son optimisme inaltérables ont été source de motivation tout au long de ces quatre années de doctorat. Je lui suis également reconnaissant de m'avoir impliqué dans les autres projets du laboratoire, en particulier en Mongolie.

J'adresse toute ma reconnaissance aux membres du jury, qui ont accepté de juger mon travail. Jérôme Dymont et Nicolas Florsch ont accepté très spontanément de rapporter cette thèse. Je les remercie sincèrement pour l'intérêt dont ils ont témoigné et pour les questions qu'ils ont soulevées. Je remercie vivement Pascal Sailhac pour ses conseils précieux en tant que rapporteur et collègue de l'Institut. Mes remerciements vont également à Jean-Pierre Milesi qui a bien voulu examiner mon travail. Je remercie enfin Karel Schulmann d'avoir assuré la présidence de mon jury de thèse.

Un manuscrit de thèse est avant tout la somme de contributions individuelles, je remercie vivement tous les chercheurs avec qui j'ai pu travailler car...

Un géophysicien n'est rien sans un physicien...

Je voudrai exprimer ma profonde gratitude à Jean Jacques Schott dont la rigueur et la précision redoutables m'ont permis d'élaborer l'édifice logique soutenant les développements théoriques de ma thèse. La confiance qu'il m'a accordée dans mes recherches sur les *superpotentiels* et *tenseurs magnétiques* m'a encouragé à continuer dans cette voie. Je voudrais aussi adresser mes remerciements amicaux à Daniel Husson (Institut Pluridisciplinaire Hubert Curie CNRS/Université de Strasbourg) et Fabrice Thalmann (Institut Charles Sadron, CNRS/Université de Strasbourg) pour nos discussions animées de physique. Mon choix d'appréhender les méthodes magnétiques par la physique de Maxwell a pu trouver un appui sans faille.

Un géophysicien n'est rien sans un géologue...

J'adresse mes vifs remerciements à François Gauthier-Lafaye. Ses connaissances approfondies du contexte aussi bien géologique que minier du Bassin de Franceville ont permis de guider mes recherches de cibles uranifères. Grâce à son expérience, les interprétations issues de toute ma « *tambouille* » (F. G.-L.) de traitements de cartes magnétiques ont pu passer au crible de son regard affûté.

Un géophysicien n'est rien sans son équipe de recherche...

Je remercie tous les autres chercheurs et jeunes docteurs de l'EOST avec qui j'ai pu discuter de sujets variés m'ouvrant l'esprit vers d'autres contrées toutes aussi passionnantes que le magnétisme. Des échanges ouverts et souvent teintés d'humour contribuant à une bonne atmosphère pour faire de la Science.

Un géophysicien n'est rien sans les autres êtres humains...

Ma gratitude va d'abord aux étudiants à qui j'ai eu le plaisir d'enseigner différents aspects de la géophysique pendant ces quatre années. Ces moments ont souvent été source de questionnement et d'autocritique. C'est aussi grâce à eux que j'ai progressé dans la compréhension de la discipline.

Pour enseigner, il faut un jour avoir été formé : je remercie toute l'équipe enseignante de l'EOST pour ses qualités humaines et pédagogiques pour les trois années que j'ai passées en tant qu'élève-ingénieur. Je n'oublie pas mes maîtres de stage qui m'ont initié à la recherche en géophysique : Esteban Hernández (Instituto de Geofísica, Servicio Magnético UNAM, México), Jürgen Kusche (Physical and Space Geodesy, TU-Delft) et Marc Descloitres (Cellule Franco-Indienne de Recherches en Sciences de l'Eau, Indian Institute of Science, Bangalore). Un peu plus loin encore, je repense avec plaisir à mes premières olympiades de la physique avec Marie-Christine Baurrier au lycée Pothier d'Orléans.

Mes remerciements vont aussi à toute la communauté des doctorants en Sciences de la Terre. Même si certaines phases de la thèse sont difficiles, je leur souhaite beaucoup de plaisir pour aboutir dans leur recherche. Je pense aussi à mes amis Martin et Clémence qui ont su parfaitement m'éclairer dans le dédale administratif parfois obscur des « *fonctionnaires titulaires de classe normale de catégorie A détachés dans l'enseignement supérieur* ».

J'adresse mes remerciements à tout le personnel qui fait fonctionner l'EOST : leur dévouement, leur sympathie et leur sourire n'ont jamais fait défaut.

Un grand merci à l'équipe *Business Unit Mines* d'AREVA NC, en particulier à Jean-Pierre Milesi, Joseph Roux, Fabien Gilbert, Mickael Behaegel, Anne-Laure Bouillon et Jean-Marc Miehé pour la confiance et la liberté d'action qu'ils m'ont accordées pendant mes recherches.

Je remercie aussi chaleureusement les chercheurs et le personnel administratif du SN5 de l'Université de Lille I. Mes passages éclairés de thésard « *en fin de peine* » ne m'ont pas permis d'être très présent au labo, mais j'ai pu découvrir une atmosphère conviviale et une région attachante.

Je souhaite également saluer mes compagnons de terrain avec qui j'ai partagé des moments forts aussi bien en Australie qu'en Mongolie. Un grand merci à Fabien Gilbert à l'origine de l'expédition australienne. Un grand merci à Antoine Schlupp, à l'initiative du projet en Mongolie ainsi qu'à tous les autres collègues, en particulier : Marc Munsch, Maksim Bano, Matthieu Ferry et Jean-Remi Dujardin. Je voudrai remercier tous les collègues mongols pour leur accueil et leurs gestes d'amitié pendant les trois missions. J'aurai souhaité traiter de la Mongolie dans ma thèse, mais les choix sont parfois difficiles...

Je souhaite aussi remercier Odette Eylat qui a suivi avec intérêt mes recherches et s'est proposée de les faire partager sur les ondes de Radio Judaïca Strasbourg.

Un grand merci aussi à mes amis Alexis, Stan et Yoni qui ont su montré le désintérêt le plus total à mes recherches, cela m'a permis de prendre de la hauteur et de m'ouvrir l'esprit vers des considérations méta-géophysiques.... !

Enfin, je pense à ma famille. Qu'aurais-je pu étudier sans leur soutien et leurs encouragements aux études, au questionnement, à l'ouverture d'esprit et à la curiosité intellectuelle ?

Le dernier mot est toujours le plus chéri, il va pour Mickaëlle. Tout simplement parce que la vie ne serait rien sans toi.

À Mickaëlle.

Résumé étendu

Le but de ce travail de thèse est d'établir une nouvelle cartographie de cibles potentiellement uranifères dans le Bassin de Franceville à partir de données aéromagnétiques. Nous procédons en deux temps :

- 1) *D'abord de façon **méthodologique** : nous présentons les développements théoriques et numériques relatifs aux méthodes potentielles dans les domaines spatial et spectral.*

Nous évaluons dans quelle mesure l'anomalie mesurée est un bon estimateur de l'anomalie de projection. Cette dernière fonction est essentielle pour calculer simplement le potentiel. Nous montrons que pour une anomalie dipolaire usuelle, causée par une source élémentaire dont il suffira d'additionner les effets pour modéliser une source quelconque, l'écart entre ces deux anomalies peut dépasser 5%. Nous proposons une méthode pour diminuer cet écart.

La suite des développements tente de généraliser l'opération de réduction au pôle afin de symétriser à l'aplomb d'une source magnétique quelconque les fonctions magnétiques caractéristiques. Ainsi, les superpotentiels scalaire et vecteur sont introduits de manière originale en méthode magnétique. Le superpotentiel vecteur est celui dont dérive (par rotationnel) le potentiel vecteur et le superpotentiel scalaire est celui dont dérive (par dérivation oblique) le potentiel magnétique. Par comparaison au formalisme habituellement utilisé pour calculer le tenseur du gradient magnétique, nous définissons le tenseur de l'anomalie magnétique à partir des dérivées secondes du superpotentiel scalaire. Le superpotentiel et son supertenseur dérivé présentent des propriétés intéressantes de symétrie permettant de faciliter l'interprétation d'une carte magnétique.

L'efficacité du supertenseur, équivalent mathématique du tenseur du gradient gravimétrique, est prouvée avec l'exemple d'une source allongée. Les outils de l'analyse matricielle et du traitement du signal sont utilisés afin de déterminer la localisation horizontale de la source, sa géométrie et sa profondeur.

2) *Puis de façon **concrète**, nous appliquons nos résultats à l'étude aéromagnétique du Bassin de Franceville dans un contexte d'exploration minière et en particulier uranifère.*

Nous disposons de levés aéromagnétiques réalisés pour AREVA NC dans le quart Sud-Est du territoire gabonais. Il s'agit d'abord de relier la présence de pièges potentiellement uranifères à l'existence d'anomalies magnétiques. L'étude du modèle métallogénique de l'uranium francevillien nous conduit à concentrer notre étude sur :

- i) le signal magnétique de basse fréquence afin de détecter les limites du socle aimanté ainsi que les oscillations de sa topographie.

Ce signal est d'abord analysé par la méthode de Talwani pour une interprétation 2D du socle. Celle-ci est complétée par le calcul du potentiel et du superpotentiel de la carte d'anomalie du champ total.

- ii) le signal magnétique de haute fréquence afin de localiser les couloirs de failles NO-SE.

Cependant les cartes d'anomalie sont dominées par la présence, parasite, de complexes filoniens NS et EO qui rendent cette étude plus difficile d'accès par les traitements classiques. Nous avons donc recours au tenseur de l'anomalie magnétique dont la composante xy (qui serait une réduction croisée) se révèle particulièrement intéressante pour détecter les directions NO-SE. Le filtrage directionnel permet de compléter cette analyse.

L'interprétation est abordée essentiellement en termes de direction de structure. Nous présentons aussi quelques éléments d'interprétation sur les pendages, basés sur des signaux analytiques à plusieurs altitudes. Pour compléter l'étude du bassin, il est montré comment la profondeur des sources peut être obtenue directement à partir du superpotentiel et de son supertenseur.

Pour finir, les résultats qui concluent cette étude multi-échelle (spatiale et fréquentielle) sont rassemblés sur une carte structurale fournissant aux décideurs de nouveaux indices potentiellement uranifères.

Extended abstract

The purpose of this thesis is to process aeromagnetic data in order to establish a new map of uranium targets in the Franceville Basin. We proceed in two steps:

1) First, we proceed from a methodological point of view. We present the theoretical and numerical developments of the potential methods in space and frequency domains.

We evaluate how well the measured anomaly is a good estimator of the projection anomaly. This function is essential to calculate easily the potential. We show that for a usual dipole anomaly - caused by an elementary source which simple effects addition may model any sources - the difference between these two anomalies function may exceed 5%. We propose a method to reduce this gap.

The following developments attempt to generalize the reduction-to-the-pole operator so that symmetrical sources cause symmetrical magnetic functions. Thus, the superpotential scalar and vector are newly defined for magnetic methods. The vector superpotential is the function from which derives the vector potential and the scalar superpotential is the function from which derives the magnetic potential. Compared to the formalism generally used to calculate the magnetic gradient tensor, we calculate the magnetic anomaly tensor with the second derivatives of the scalar superpotential. The superpotential and its supertensor have interesting symmetry properties that help the interpretation of magnetic maps.

The effectiveness of the supertensor - that is the equivalent of the gravimetric gradient tensor - is shown using the example of an elongated source. Matrix analysis and signal processing are used in order to determine the horizontal location of the source body, its geometry and depth.

2) Second, we apply our results to analyze aeromagnetic data from Franceville Basin with a mining exploration goal, focused on uranium deposits.

Aeromagnetic data were collected by AREVA NC in South-East Gabon. The first step is to link the presence of potential uranium deposits with the existence of magnetic anomalies. The metallogenic model of Francevillian uranium leads us to focus our study on:

i) the low-frequency magnetic signal to detect the boundaries of the magnetic basement and the oscillations of its topography.

This signal is first analyzed by the Talwani method for 2D interpretation of the basement. Then, calculations of the potential and superpotential of the total field anomaly help us to improve this interpretation.

ii) the high-frequency magnetic signal to locate NW-SE faults.

However, the anomaly maps are dominated by the presence of NS and EW dykes that make this study more difficult to be processed by standard tools. That's why the xy component of the magnetic tensor was implemented to detect the NW-SE direction. The directional filtering enables us to improve this analysis.

The interpretation is first discussed in terms of structure direction. There are also some elements of interpretation of the dips, based on analytical signals at various altitudes. To complete the study of the basin, it is shown how the depth to sources can be obtained directly from the superpotential and its supertensor.

Finally, the concluding results of this multi-scale study (in space and frequency domain) are gathered in a structural map providing the structuralist new information regarding potentially new uranium deposits.

“ Le jour où la navigation, qui est une routine, deviendra une mathématique, le jour où l’on cherchera à savoir, par exemple, pourquoi, dans nos régions, les vents chauds viennent parfois du nord et les vents froids du midi [...], le jour où l’on aura présent à l’esprit que le globe est un gros aimant polarisé dans l’immensité, avec deux axes, un axe de rotation et un axe d’effluves, s’entrecoupant au centre de la terre, et que les pôles magnétiques tournent autour des pôles géographiques ; quand ceux qui risquent leur vie voudront la risquer scientifiquement, quand on naviguera sur de l’instabilité étudiée, quand le capitaine sera un météorologue, quand le pilote sera un chimiste, alors bien des catastrophes seront évitées. La mer est magnétique autant qu’aquatique. ”

Victor Hugo

L’Homme qui rit, Première partie, Livre deuxième, Chapitre I, 1869

Table des matières

INTRODUCTION GÉNÉRALE ET OBJECTIFS.....	19
CHAPITRE I : CHAMP ET ANOMALIES MAGNÉTIQUES	24
1.1 QUELQUES ÉLÉMENTS DE MAGNÉTISME TERRESTRE	24
1.1.1 <i>Le champ magnétique terrestre.....</i>	24
1.1.2 <i>Propriétés magnétiques intrinsèques des matériaux de la croûte terrestre.....</i>	26
1.1.3 <i>Les modèles de référence du champ magnétique terrestre</i>	28
1.2 LES ANOMALIES DU CHAMP MAGNÉTIQUE.....	30
1.2.1 <i>Définition du champ d'anomalie.....</i>	30
1.2.2 <i>Définition de l'anomalie du champ total.....</i>	31
1.2.3 <i>Développement limité de l'anomalie du champ total.....</i>	32
1.2.4 <i>Premier terme du développement limité : définition de l'AICM1</i>	33
1.2.5 <i>Second terme du développement limité : définition de l'AICM2</i>	36
1.2.6 <i>Formule de récurrence pour F.....</i>	38
1.2.7 <i>Application de la formule de récurrence : passage à la limite</i>	39
1.2.8 <i>Étude numérique de la différence $F - F_1$ à F constant.....</i>	40
1.2.9 <i>Étude numérique de la différence $F - F_1$ à C constant.....</i>	42
1.3 MESURE TENSORIELLE DU GRADIENT MAGNÉTIQUE	43
1.4 BILAN - CONCLUSION.....	44
 CHAPITRE II : ÉTUDE DU DIPÔLE MAGNÉTIQUE DANS LE DOMAINE SPATIAL.....	 49
2.1 CHAMP ET POTENTIELS DIPOLAIRES	50
2.1.1 <i>Moment magnétique élémentaire</i>	50
2.1.2 <i>Potentiel vecteur magnétique dipolaire</i>	52
2.1.3 <i>Potentiel scalaire magnétique dipolaire</i>	54
2.1.4 <i>Champ magnétique dipolaire</i>	57
2.2 ANOMALIES DIPOLAIRES	61
2.2.1 <i>Anomalie de l'Intensité du Champ Magnétique : AICM.....</i>	61
2.2.2 <i>Calcul de l'anomalie de l'intensité du champ magnétique à l'ordre 1.....</i>	64
2.2.3 <i>Calcul de l'anomalie de l'intensité du champ magnétique à l'ordre 2.....</i>	66
2.2.4 <i>Comparaison entre l'AICM et l'AICM1.....</i>	67
2.3 SUPERPOTENTIELS DIPOLAIRES	69
2.3.1 <i>Superpotentiel vecteur magnétique</i>	69
2.3.2 <i>Superpotentiel scalaire magnétique</i>	71

2.4	RELATIONS DE PASSAGE ENTRE LES FONCTIONS MAGNÉTIQUES.....	73
2.4.1	<i>Superpotentiel vecteur et potentiels</i>	73
2.4.2	<i>Anomalie de projection et potentiels vecteurs.....</i>	74
2.4.3	<i>Superpotentiel scalaire et potentiels</i>	74
2.4.4	<i>Anomalie de projection et potentiels scalaires</i>	75
2.4.5	<i>Vue synoptique des fonctions magnétiques</i>	76
2.5	UTILISATION DES RELATIONS DE PASSAGE.....	77
2.5.1	<i>Calcul des potentiel et superpotentiel scalaires à partir de l'anomalie</i>	77
2.5.2	<i>Calcul du superpotentiel vecteur magnétique à partir du superpotentiel scalaire.....</i>	77
2.5.3	<i>Calcul du potentiel vecteur magnétique à partir du superpotentiel vecteur.....</i>	78
2.5.4	<i>Calcul du champ d'anomalie magnétique à partir du potentiel vecteur.....</i>	78
2.5.5	<i>Calcul du champ d'anomalie magnétique à partir du potentiel scalaire</i>	78
2.5.6	<i>Calcul du champ d'anomalie magnétique à partir du superpotentiel scalaire.....</i>	78
2.6	TENSEURS MAGNÉTIQUES	79
2.6.1	<i>Calcul du tenseur du gradient magnétique à partir du potentiel magnétique</i>	79
2.6.2	<i>Calcul du tenseur de l'anomalie magnétique à partir du superpotentiel magnétique.</i>	81
2.7	ÉQUATIONS DE POISSON DANS L'ESPACE ENTIER.....	85
2.7.1	<i>Potentiel scalaire magnétique</i>	85
2.7.2	<i>Superpotentiel vecteur magnétique</i>	86
2.7.3	<i>Superpotentiel scalaire magnétique</i>	86
2.7.4	<i>Anomalie de l'intensité du champ magnétique</i>	87
2.7.5	<i>Équations de Poisson et méthodes potentielles.....</i>	87
2.8	ÉQUATIONS DE LAPLACE DANS UN DEMI-ESPACE.....	88
2.8.1	<i>Potentiel scalaire magnétique</i>	88
2.8.2	<i>Superpotentiels magnétiques.....</i>	88
2.8.3	<i>Anomalie de l'intensité du champ magnétique</i>	89
2.9	SOLUTION DE L'ÉQUATION DE LAPLACE DANS UN DEMI-ESPACE	90
 CHAPITRE III : ÉTUDE DU DIPÔLE MAGNÉTIQUE DANS LE DOMAINE SPECTRAL..... 94		
3.1	ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPECTRAL À TROIS DIMENSIONS.....	94
3.1.1	<i>Définition de la Transformée de Fourier directe et inverse à trois dimensions</i>	95
3.1.2	<i>Expression de l'anomalie comme produit de fonctions</i>	95
3.1.3	<i>Potentiel magnétique dipolaire</i>	97
3.1.4	<i>Superpotentiel magnétique dipolaire</i>	98
3.1.5	<i>Equations de Poisson</i>	98
3.1.5.1	<i>Anomalie de l'intensité du champ magnétique</i>	98
3.1.5.2	<i>Potentiel d'anomalie</i>	99
3.1.5.3	<i>Superpotentiel d'anomalie</i>	99
3.2.	ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPECTRAL À DEUX DIMENSIONS.....	100
3.2.1	<i>Équation de Laplace pour le potentiel sur un plan.....</i>	100

3.2.2	<i>Fonction de Green dans le domaine spectral et opérateurs de dérivation</i>	101
3.2.3	<i>Expression de l'anomalie magnétique dipolaire.....</i>	104
3.2.4	<i>Potentiel magnétique dipolaire</i>	105
3.2.5	<i>Superpotentiel magnétique dipolaire</i>	107
3.2.6	<i>Dérivation des fonctions magnétiques</i>	110
3.2.6.1	<i>Opérateur de dérivation verticale</i>	110
3.2.6.2	<i>Des potentiels aux vecteurs et tenseurs magnétiques.....</i>	112
3.3	BILAN ET CONCLUSIONS DES CHAPITRES II ET III	119

CHAPITRE IV : PRISME MAGNÉTIQUE ET SOURCES QUELCONQUES 123

4.1	ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPATIAL À TROIS DIMENSIONS.....	124
4.1.1	<i>Source prismatique.....</i>	124
4.1.1.1	<i>Définition analytique de la source prismatique</i>	125
4.1.1.2	<i>Aimantation d'une source en volume</i>	125
4.1.1.3	<i>Potentiel scalaire magnétique d'un prisme.....</i>	128
4.1.1.4	<i>Champ magnétique.....</i>	128
4.1.1.5	<i>Anomalies magnétiques.....</i>	129
4.1.1.6	<i>Superpotentiel magnétique</i>	133
4.1.2	<i>Source quelconque et direction de l'aimantation uniforme</i>	134
4.1.2.1	<i>Relations croisées entre superpotentiels et potentiels magnétiques</i>	135
4.1.2.2	<i>Relation entre le superpotentiel magnétique et le potentiel gravimétrique</i>	136
4.1.2.3	<i>Relation entre le tenseur de l'anomalie magnétique et le tenseur du gradient gravimétrique</i>	136
4.1.2.4	<i>Relation entre le tenseur du gradient magnétique et les dérivées du tenseur du gradient gravimétrique.....</i>	137
4.1.3	<i>Source quelconque et direction du moment magnétique variable</i>	139
4.1.3.1	<i>Relations croisées entre superpotentiels et potentiels magnétiques</i>	139
4.1.3.2	<i>Vue synoptique des fonctions magnétiques</i>	141
4.2	ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPECTRAL À TROIS DIMENSIONS.....	141
4.2.1	<i>Expression de l'anomalie magnétique comme un produit de fonctions.....</i>	142
4.2.2	<i>Potentiel et superpotentiel magnétiques</i>	143
4.2.3	<i>Équations de Poisson</i>	143
4.2.3.1	<i>Anomalie de projection</i>	143
4.2.3.2	<i>Potentiel d'anomalie magnétique.....</i>	144
4.2.3.3	<i>Superpotentiel d'anomalie magnétique.....</i>	144
4.3	ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPECTRAL À DEUX DIMENSIONS.....	144
4.3.1	<i>Expression analytique de la fonction de localisation de la source prismatique</i>	145
4.3.2	<i>Expression de l'anomalie magnétique dipolaire.....</i>	145
4.3.3	<i>Potentiel magnétique.....</i>	146
4.3.4	<i>Superpotentiel magnétique</i>	147
4.3.5	<i>Bilan - Discussion</i>	147
4.4	BILAN ET CONCLUSIONS.....	148

CHAPITRE V : UTILISATION DU SUPERPOTENTIEL ET DU TENSEUR DE L'ANOMALIE MAGNÉTIQUE 152

5.1	LE SUPERPOTENTIEL EN MODÉLISATION MAGNÉTIQUE	152
5.1.1	<i>Ligne finie plongeante de dipôles magnétiques</i>	<i>153</i>
5.1.2	<i>Superpotentiels scalaire et vecteur</i>	<i>154</i>
5.1.3	<i>Potentiels scalaire et vecteur</i>	<i>155</i>
5.1.4	<i>Anomalie et vecteur magnétique</i>	<i>156</i>
5.2	LE TENSEUR DE L'ANOMALIE MAGNÉTIQUE EN INVERSION	159
5.2.1	<i>Calcul pratique du tenseur à partir de l'anomalie</i>	<i>159</i>
5.2.2	<i>Calcul du déterminant du tenseur magnétique</i>	<i>165</i>
5.2.3	<i>Analyse en éléments propres du tenseur magnétique.....</i>	<i>166</i>
5.2.3.1	<i>Détermination des valeurs propres</i>	<i>167</i>
5.2.3.2	<i>Indice de dimensionnalité.....</i>	<i>171</i>
5.2.3.3	<i>Détermination des vecteurs propres</i>	<i>172</i>
5.2.4	<i>Estimation de profondeur de source</i>	<i>175</i>
5.2.4.1	<i>Superpotentiel approximé de la ligne de dipôle.....</i>	<i>175</i>
5.2.4.2	<i>Signal analytique du superpotentiel.....</i>	<i>176</i>
5.2.4.3	<i>Rapport du signal analytique du superpotentiel avec la composante zz du TAM..</i>	<i>178</i>
5.3	BILAN ET CONCLUSIONS.....	180

CHAPITRE VI : PROSPECTION AÉROMAGNÉTIQUE APPLIQUÉE À L'EXPLORATION DU BASSIN DE FRANCEVILLE... 185

6.1	CONTEXTE GÉOLOGIQUE GÉNÉRAL DU FRANCEVILLIEN : SYNTHÈSE DES TRAVAUX ANTÉRIEURS.....	185
6.1.1	<i>Principales phases tectoniques affectant le Bassin de Franceville.....</i>	<i>187</i>
6.1.2	<i>Faciès et paléo-environnements des dépôts francevilliens</i>	<i>187</i>
6.1.3	<i>Structure du Bassin de Franceville</i>	<i>190</i>
6.1.4	<i>Distribution des minéralisations uranifères.....</i>	<i>192</i>
6.1.5	<i>Modèle génétique de l'uranium francevillien</i>	<i>193</i>
6.2	PROBLÉMATIQUE SCIENTIFIQUE DE L'ÉTUDE GÉOPHYSIQUE.....	195
6.2.1	<i>Prospection uranifère.....</i>	<i>195</i>
6.2.2	<i>Objectifs de l'interprétation des données aéromagnétiques</i>	<i>195</i>
6.3	LES DIFFÉRENTS LEVÉS AÉROMAGNÉTIQUES.....	197
6.3.1	<i>Contexte autour des données.....</i>	<i>197</i>
6.3.2	<i>Spécifications techniques des différents levés</i>	<i>198</i>
6.3.3	<i>Corrections appliquées aux données.....</i>	<i>200</i>
6.3.4	<i>Elaboration des grilles.....</i>	<i>201</i>
6.3.5	<i>Présentation des levés aéromagnétiques.....</i>	<i>201</i>
6.3.5.1	<i>Modèles Numériques de Terrain de la zone étudiée</i>	<i>203</i>
6.3.5.2	<i>Levés supra-bassinaux</i>	<i>205</i>
6.3.5.3	<i>Levés intra-bassinaux.....</i>	<i>206</i>

6.4	TRAITEMENTS STANDARDS ET INTERPRÉTATION DES CARTES	214
6.4.1	<i>Principes généraux de l'interprétation en méthode magnétique</i>	214
6.4.2	<i>Méthodes classiques d'interprétation</i>	215
6.4.2.1	<i>Réduction au pôle.....</i>	215
6.4.2.2	<i>Dérivations et intégrations.....</i>	217
6.4.2.3	<i>Prolongements verticaux.....</i>	217
6.4.2.4	<i>Inversion par la couche équivalente d'anomalie</i>	218
6.4.2.5	<i>Tilt angle</i>	219
6.4.2.6	<i>Filtrage directionnel</i>	220
6.4.2.7	<i>Modélisation 2D par la méthode de Talwani.....</i>	221
6.4.2.8	<i>Précaution d'usage autour des opérateurs de transformation</i>	222
6.4.3	<i>Interprétation magnétique des levés supra-bassinaux.....</i>	222
6.4.4	<i>Interprétation magnétique des levés intra-bassinaux</i>	223
6.4.4.1	<i>Zone occidentale de Mounana-Bangombé.....</i>	223
6.4.4.2	<i>Zone centrale de Mikouloungou-Kiéné.....</i>	230
6.4.4.3	<i>Zone orientale de Djokaye-Mopia.....</i>	232
6.4.4.4	<i>Bilan-conclusion.....</i>	233
6.5	TRAITEMENTS AMÉLIORÉS ET INTERPRÉTATION DES CARTES	233
6.5.1	<i>Zone centrale de Mikouloungou-Kiéné : Aspect multi-altitude</i>	233
6.5.1.1	<i>Prolongements verticaux.....</i>	234
6.5.1.2	<i>Signal analytique.....</i>	235
6.5.2	<i>Zone occidentale de Mounana-Bangombé.....</i>	238
6.5.2.1	<i>Superpotentiel et signaux analytiques.....</i>	238
6.5.2.2	<i>Tenseur de l'anomalie magnétique</i>	239
6.5.2.3	<i>Filtrage directionnel</i>	242
6.5.2.4	<i>Analyse matricielle du tenseur de l'anomalie magnétique</i>	243
6.5.3	<i>Bilan-conclusion.....</i>	248
6.6	BILAN ET CONCLUSIONS DE L'ÉTUDE GÉOPHYSIQUE	249
	CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES	253
	LISTE DES GRANDEURS ET VARIABLES UTILISÉES.....	257
	BIBLIOGRAPHIE	261
	ANNEXES	275

Introduction générale et objectifs

L'étude, à la surface de la Terre, du champ magnétique et du champ de pesanteur constitue deux des nombreuses applications de la physique des champs de potentiels. En géophysique, elles sont réunies sous le vocable de *méthodes potentielles*. Elles se déclinent en deux disciplines étudiant les variations de chacun de ces deux champs : les méthodes magnétiques et les méthodes gravimétriques. Nous nous intéresserons principalement aux méthodes magnétiques.

Aujourd'hui, ces méthodes sont couramment utilisées pour l'exploration de la proche surface aussi bien pour la recherche d'objets anthropiques que pour l'étude des signaux naturels. Les cibles que nous privilégierons dans ce travail seront principalement géologiques et structurales pour la recherche minière et, en particulier, uranifère.

Cependant, les données magnétiques ne permettent pas directement d'appréhender les caractéristiques des unités structurales et lithologiques d'une zone prospectée. Ce travail de thèse s'organise autour de six chapitres afin de proposer quelques solutions :

- d'abord méthodologiques, en explorant précisément les définitions des différentes anomalies magnétiques (**chapitre I**) ;
- ensuite physiques, en introduisant les fonctions magnétiques caractéristiques qui en découlent (**chapitre II à V**) ;
- enfin pratiques, en améliorant les outils de traitement de cartes aéromagnétiques pour la prospection minière (**chapitre VI**).

Cette thèse propose de nouvelles solutions dans la difficulté de localiser horizontalement une source aimantée à partir de données magnétiques non réduites au pôle. Elle propose une généralisation de l'opérateur de réduction au pôle en introduisant de nouvelles fonctions, appelées *superpotentiel magnétique* et *tenseur de l'anomalie magnétique*, qui sont indépendantes des directions de champ et d'aimantation.

Plus précisément, le **premier chapitre** aborde le problème, rarement discuté dans la bibliographie, des définitions et approximations des différentes fonctions anomalies. Ces approximations sont quantifiées littéralement dans le cas général d'une anomalie quelconque. Ces résultats apportent un éclairage nouveau et surtout une justification de l'applicabilité des méthodes potentielles au concept d'anomalie magnétique.

Les **quatre chapitres** suivants sont consacrés à l'étude des sources classiques d'anomalies magnétiques. Partant du dipôle, la source élémentaire de magnétisme, l'étude est élargie au prisme puis aux sources quelconques. Notre cadre de référence est la physique classique de Maxwell, en particulier la magnétostatique dans le demi-espace au-dessus des sources. Toutefois, les implications géophysiques, en termes de modélisation et d'inversion, ne sont pas négligées. Ainsi, nos développements mathématiques, d'abord menés dans le domaine spatial, sont ensuite transposés au domaine spectral, plus commode pour la mise en œuvre des traitements sur les données.

Pour l'aspect **modélisation**, nous examinons de près certaines fonctions classiques en magnéto-statique qui n'ont jamais fait l'objet d'une étude approfondie pour les méthodes magnétiques. De façon originale, le vecteur de Hertz ou *superpotentiel* est transposé, dans sa forme scalaire, pour ces méthodes. Nous testons l'efficacité du superpotentiel en modélisation pour calculer, par simples dérivations, les potentiels et anomalies de sources étendues telles qu'une ligne finie plongeante de dipôles. Cette source est intéressante pour l'étude des effets magnétiques des corps étroits et allongés tels que les veines minéralisées.

Pour l'aspect **inversion**, le superpotentiel est mis à profit pour construire le *tenseur de l'anomalie magnétique*, différent du tenseur du gradient magnétique. Ce nouveau tenseur est utilisé pour estimer les caractéristiques géométriques d'une source. Chacune de ses neuf composantes fait ressortir une direction privilégiée. Ensuite, un traitement matriciel de ce tenseur (déterminant, décomposition en éléments propres) permet de préciser la localisation horizontale des structures, leur géométrie ainsi que leur azimuth pour les corps 2D. Pour compléter quantitativement la localisation, les profondeurs de structure sont obtenues directement en combinant l'amplitude du signal analytique du superpotentiel et une des composantes du tenseur.

Au **dernier chapitre**, ces améliorations de traitement sont mises à contribution afin de mieux connaître la structuration du Bassin de Franceville (Gabon). Cette zone a fait l'objet de levés aéromagnétiques de grande envergure ; certaines structures présentent un intérêt minier considérable. Il conviendra d'expliquer comment la gîtologie de l'uranium peut être reliée à l'existence d'anomalies magnétiques. Ces indications orienteront l'exploitation des données aéromagnétiques disponibles sur le bassin. L'utilisation conjointe d'outils classiques de traitements de cartes et d'outils nouveaux développés aux chapitres précédents sera mise à profit pour établir une nouvelle cartographie des cibles potentiellement uranifères dans le Bassin de Franceville.

Enfin en **annexe**, figurent les diapositives sur lesquelles s'est appuyée ma soutenance de thèse le 27 septembre 2011. Le lecteur souhaitant se faire une idée synthétique de mon travail et de mes résultats essentiels pourra s'y référer à tout moment.

Chapitre I

CHAMP ET ANOMALIES MAGNÉTIQUES

1.1	QUELQUES ÉLÉMENTS DE MAGNÉTISME TERRESTRE	24
1.1.1	<i>Le champ magnétique terrestre.....</i>	24
1.1.2	<i>Propriétés magnétiques intrinsèques des matériaux de la croûte terrestre.....</i>	26
1.1.3	<i>Les modèles de référence du champ magnétique terrestre</i>	28
1.2	LES ANOMALIES DU CHAMP MAGNÉTIQUE.....	30
1.2.1	<i>Définition du champ d'anomalie.....</i>	30
1.2.2	<i>Définition de l'anomalie du champ total.....</i>	31
1.2.3	<i>Développement limité de l'anomalie du champ total.....</i>	32
1.2.4	<i>Premier terme du développement limité : définition de l'AICM1</i>	33
1.2.5	<i>Second terme du développement limité : définition de l'AICM2</i>	36
1.2.6	<i>Formule de récurrence pour F.....</i>	38
1.2.7	<i>Application de la formule de récurrence : passage à la limite</i>	39
1.2.8	<i>Étude numérique de la différence $F - F_1$ à F constant</i>	40
1.2.9	<i>Étude numérique de la différence $F - F_1$ à C constant.....</i>	42
1.3	MESURE TENSORIELLE DU GRADIENT MAGNÉTIQUE	43
1.4	BILAN - CONCLUSION.....	44

“ Bien que les ténèbres du doute enveloppent encore toute la théorie positive du magnétisme, ses foudroyants effets sont maintenant presque universellement admis. ”

Edgar Allan Poe

Révélation Magnétique, 1844

Chapitre I : CHAMP ET ANOMALIES MAGNÉTIQUES

Les propriétés magnétiques de certains matériaux terrestres étaient déjà connues à l'époque de l'Antiquité, il y a environ 2500 ans. Aussi, le mot « *magnétisme* » vient du grec « *magnes* », qui a son origine en Thessalie dans l'ancienne cité grecque de « *Magnésie* », où l'on extrayait un minerai aux propriétés naturellement magnétiques, appelé pierre d'aimant. On sait aujourd'hui que cette pierre citée par Lucrèce est un oxyde de fer (Fe_3O_4), appelée « *magnétite* ».

Jusqu'au début du XIX^e siècle, la seule source pratique de magnétisme était cette pierre noire de magnétite. C'est en 1820 qu'Oersted découvre par hasard que des charges électriques en mouvement produisent aussi des champs magnétiques. Electricité et magnétisme se trouvent donc étroitement liés, ce sont en fait deux manifestations d'un même phénomène appelé électromagnétisme. Le phénomène physique à la base de cette observation est l'existence du dipôle magnétique, la boucle de courant qui génère un champ magnétique.

Dans ce chapitre, consacré aux généralités sur le magnétisme terrestre, nous aborderons l'aspect dipolaire du champ géomagnétique pour ensuite introduire la notion d'anomalie magnétique et sa mesure sur le terrain. Nous verrons que la notion d'anomalie recouvre une variété de définitions et sous-entend des approximations qui sont rarement discutées. Ce chapitre a pour objectif de les quantifier.

1.1 QUELQUES ÉLÉMENTS DE MAGNÉTISME TERRESTRE

1.1.1 Le champ magnétique terrestre

L'induction magnétique, mesurée à la surface de la Terre, notée \vec{B} , est une grandeur vectorielle dont l'intensité se mesure en Tesla (T), ce qui correspond au Weber.m^{-2} ou bien encore au $\text{kg.s}^{-2}.\text{A}^{-1}$ dans le système international (SI). Elle est la résultante de toutes les sources magnétiques environnantes : noyau, croûte, objets géologiques ou anthropiques, ionosphère, magnétosphère, etc. Ces sources se distinguent par un magnétisme de type rémanent ou de type induit, c'est-à-dire engendré par un flux de courant, respectivement, interne ou externe à la source

magnétique. L'étude fine de ces sources sera menée aux chapitres suivants et sera l'occasion de distinguer induction magnétique et champ magnétique ; pour l'instant nous les confondons.

Le champ magnétique créé par le noyau représente à lui seul plus de 80 % du champ magnétique total mesuré à la surface de la Terre (Campbell, 1997 ; Roy, 2008). Aussi, au premier ordre, le champ terrestre est de type dipolaire et varie entre 30 000 et 60 000 nT à la surface du géoïde. Les lignes de champ, lignes tangentes en tout point au champ magnétique, sont analogues à celles créées par un aimant droit. Cette analogie est déjà rapportée en 1600 par W. Gilbert dans son ouvrage *De Magnete, Magneticisque Corporibus et de Magno Magnete Tellure*, dans lequel il prouve l'origine interne du champ magnétique et la similitude de ses lignes de champ avec celles créées par une sphère naturellement aimantée.

Sur la **figure 1.1**, nous représentons les lignes magnétiques orientées d'un champ purement dipolaire. Cela permet de rappeler brièvement les propriétés essentielles d'un tel champ. Il est vertical et dirigé vers le centre de la Terre au pôle Nord géomagnétique (78.5° N ; 111° O). Il est vertical mais dirigé vers l'extérieur au pôle Sud géomagnétique (78.5° S ; 111° E). L'axe géomagnétique, passant par ces deux pôles, fait un angle d'environ $11,5^\circ$ par rapport à l'axe de rotation de la Terre, reliant les deux pôles géographiques. Enfin, il est horizontal à l'équateur magnétique.

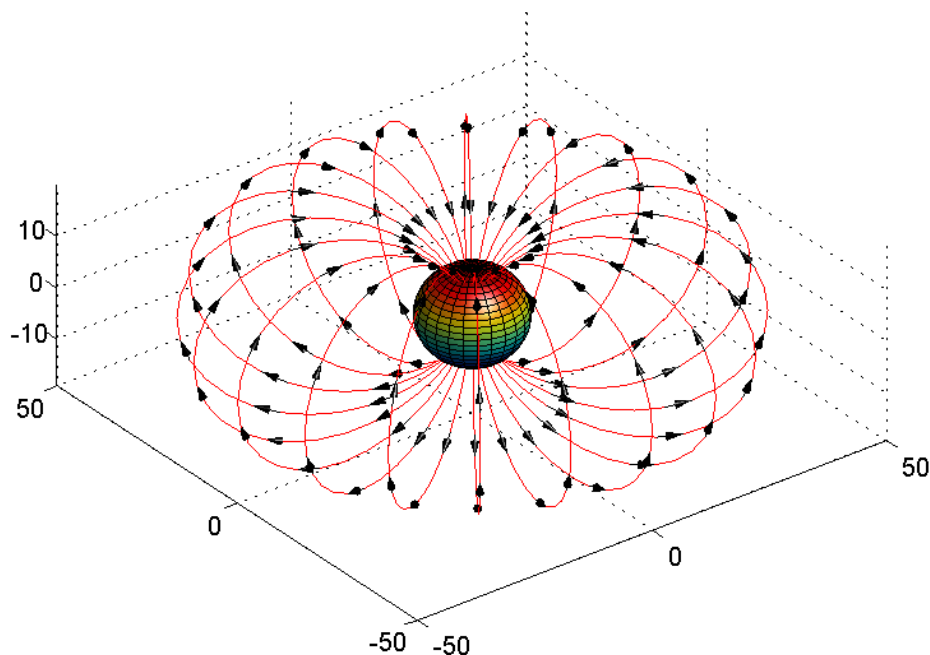


Figure 1.1 : Représentation dans l'espace des lignes d'un champ magnétique dipolaire orientées du pôle Sud au pôle Nord géomagnétiques.

La contribution crustale au champ magnétique total, mesuré en surface, est estimée à 19 % (Roy, 2008), dépassant rarement une intensité de 5000 nT. Cette source est constituée par une couche

superficielle de croûte terrestre ne dépassant pas la centaine de kilomètres d'épaisseur. Au-delà, les propriétés magnétiques intrinsèques des matériaux disparaissent en raison de l'augmentation de température.

Enfin, les mesures magnétiques satellitaires ont montré ces dernières années que le champ magnétique d'origine externe contribue à hauteur du pourcent au champ total mesuré à la surface de la Terre (Sabaka, 2002).

1.1.2 Propriétés magnétiques intrinsèques des matériaux de la croûte terrestre

Les matériaux de la croûte terrestre sont essentiellement des minéraux et plus rarement des phases amorphes. Ils se composent principalement, dans l'ordre décroissant des pourcentages massiques, supérieurs à 0.1 %, de O, Si, Al, Fe, Ca, Na, Mg, K, Ti et Mn. À cette liste d'éléments dits « *majeurs* », on peut ajouter certains éléments légers qui, si leur teneur moyenne est inférieure à 0,1 % en masse, interviennent comme « *majeurs* » dans une grande variété de phases minérales : H, C, S, P, Cl et F. Tous les autres éléments sont à l'état de traces, c'est-à-dire de teneur inférieure à 400 ppm (Du Tremolet, 1999).

Dans la liste ci-dessus, on dénombre seulement deux éléments magnétiques, c'est-à-dire susceptibles de porter des spins : Fe et Mn avec respectivement des teneurs massiques de 5 et 0.1 % en moyenne. La minéralogie magnétique se ramène donc essentiellement à celle du fer et accessoirement du manganèse. Les autres éléments magnétiques de la classification périodique Cr, Ni, Sm, Co, Nd et U, pour ne citer que les plus abondants, ont des teneurs moyennes massiques très inférieures, de 122, 99, 39, 29, 7 et 3 ppm, respectivement. Cette composition de la croûte terrestre diffère très fortement de la composition globale de la Terre, puisque le fer est le métal le plus abondant avec une teneur de 32,1 % et le nickel atteint 1,8 %. À cause de la différenciation originelle, 86 % du fer et 99 % du Ni terrestres sont stockés dans le noyau terrestre, en dessous de 2900 km de profondeur (Lliboutry, 1998).

On classe les matériaux en fonction de leurs propriétés magnétiques, caractérisées par leur susceptibilité qui est définie comme la faculté d'un échantillon à s'aimanter sous l'application d'un champ magnétique (Du Tremolet, 1999 ; Kaufman, 2009) :

- i. Les matériaux **diamagnétiques** : ils ne contiennent aucun élément magnétique et sont caractérisés par une susceptibilité χ négative. De nombreuses substances sont considérées

comme diamagnétiques : par exemple l'eau ($\chi = -9,05 \cdot 10^{-6}$ SI), certains métaux comme l'or, le mercure et le bismuth ($\chi = -166 \cdot 10^{-6}$ SI), ainsi que la plupart des matières organiques comme le pétrole et les plastiques. Les minéraux diamagnétiques les plus représentés sont la calcite (CaCO_3 , $\chi = -13,8 \cdot 10^{-6}$ SI), le quartz (SiO_2 , $\chi = -14,5 \cdot 10^{-6}$ SI) et les feldspaths ($\chi = -12,4 \cdot 10^{-6}$ SI) (Borradaile, 1988).

- ii. Les matériaux **paramagnétiques** peuvent contenir du fer (ou du manganèse) mais en quantité insuffisante pour être ordonnés à température ambiante. Ils acquièrent une aimantation uniquement sous l'effet d'un champ magnétique extérieur : celle-ci disparaît lorsque le champ extérieur est annulé. Leur susceptibilité est alors décrite par l'équation de Curie-Weiss

$$\chi = \frac{\kappa}{T - T_p},$$

avec κ la constante de Curie et T_p la température de Curie paramagnétique : ces deux grandeurs dépendent de la nature du matériau. De façon générale, le paramagnétisme est observé dans tous les éléments ayant un nombre impair d'électrons, c'est-à-dire un moment magnétique électronique non nul, tel que le sodium, l'aluminium, etc. Leur susceptibilité est positive et de l'ordre de 10^{-5} à 10^{-3} SI. Parmi les minéraux terrestres, la très grande majorité est paramagnétique ou diamagnétique à température ambiante et n'est pas capable de conserver une aimantation rémanente. Par exemple, on peut citer les oxydes pauvres en Fe, Mn ou Cr, par exemple l'ilménite FeTiO_3 , la sidérite FeCO_3 ainsi que tous les silicates ferromagnésiens. Il s'agit, essentiellement, de l'olivine $(\text{Fe,Mg})_2\text{SiO}_4$, des pyroxènes – silicates en chaînes de formule $(\text{Fe,Mg}) \text{SiO}_3$ ou bien $(\text{Fe,Mg})\text{Ca}(\text{SiO}_3)_2$ – et des amphiboles, voisines des pyroxènes mais hydratées. Les propriétés paramagnétiques de ces minéraux sont masquées dès que les ions fer ou manganèse constituent quelques pourcents de la roche totale, ils deviennent alors ferromagnétiques.

- iii. Les matériaux **ferromagnétiques** au sens large, contiennent du fer (ou du manganèse) sous formes d'oxydes, de sulfures ou d'hydroxydes. À température ambiante, ils présentent une aimantation spontanée même en l'absence de champ extérieur car à l'intérieur de domaines, appelés domaines de Weiss, leurs spins restent ordonnés. On les caractérise par leur température de Curie T_c , leur susceptibilité magnétique et leur cycle d'hystérésis. Leur susceptibilité augmente rapidement à l'approche de la température de Curie jusqu'à atteindre son maximum puis s'annuler brutalement au passage de T_c . Au-

delà le matériau devient paramagnétique, son aimantation spontanée s'annule et sa susceptibilité suit la loi de Curie Weiss mentionnée ci-dessus. Il s'agit d'un ferromagnétisme au sens large, car cette catégorie regroupe le ferromagnétisme vrai (inexistant parmi les matériaux terrestres), le ferrimagnétisme et l'antiferromagnétisme. La magnétite ($T_c = 580^\circ\text{C}$; χ varie entre 1 et 5.7 SI), de formule brute Fe_3O_4 , est le minéral ferrimagnétique le plus répandu, car c'est la forme stable du fer pour les faibles pressions partielles en oxygène. De couleur noire, il cristallise dans le système cubique et appartient à la famille des spinelles. Dans ce système Fe-O, il existe deux autres phases existant à l'état naturel : l'hématite ferrimagnétique de formule $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ($T_c = 675^\circ\text{C}$; χ varie entre $0,5 \cdot 10^{-3}$ et $40 \cdot 10^{-3}$ SI) et la maghémite antiferromagnétique de formule $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ($T_c = 600^\circ\text{C}$; χ varie entre 2 et 2.5 SI) (Dunlop et Özdemir, 1997 ; Gillet, 2003).

À l'échelle macroscopique, la présence de ces minéraux dans les roches magmatiques et métamorphiques confère à ces matériaux de fortes aimantations tant que la température ambiante reste inférieure à la température de Curie (variant de 200 à 700°C). Ainsi l'effet d'un gradient géothermique positif entraîne une disparition des propriétés magnétiques de ces matériaux au-delà d'une certaine profondeur.

Les roches sédimentaires possèdent un magnétisme beaucoup plus faible mais mesurable (Purucker, 2007).

1.1.3 Les modèles de référence du champ magnétique terrestre

Ce sont des modèles mathématiques dont les paramètres sont issus d'une analyse par harmoniques sphériques des mesures magnétiques. Celles-ci sont menées depuis des satellites ou bien en certains points de la surface du globe, par exemple, dans le réseau international d'observatoires magnétiques (Langel, 1992). Ces modèles, dits aussi « *globaux* », fournissent à une date donnée des valeurs vectorielles de la contribution interne du champ appelé « *champ de référence* », partout hors de la Terre et jusqu'à la base de l'ionosphère. Le champ Géomagnétique International de Référence (IGRF) est un exemple de modèle couramment utilisé : il est mis à jour tous les cinq ans par l'Association Internationale de Géomagnétisme et d'Aéronomie (Finlay et al., 2010).

La description du champ magnétique dans un référentiel terrestre fait apparaître ses éléments caractéristiques. Le repère géographique local d'origine O est défini par trois axes pointant dans

trois directions : OX vers le Nord géographique, OY vers l'Est géographique et OZ selon la verticale du lieu considéré, dirigé vers le bas.

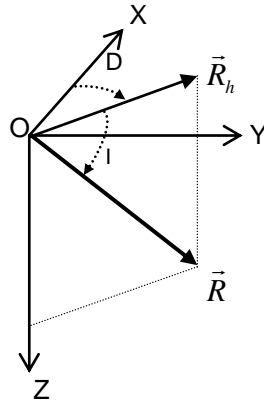


Figure 1.2 : Représentation du champ magnétique de référence dans le repère géographique local.

Trois éléments caractéristiques suffisent pour décrire entièrement le champ de référence \vec{R} :

- \vec{R}_h : la composante horizontale du champ,
- D : la déclinaison du champ, angle entre OX et \vec{R}_h .

D est positive si la déviation est vers l'Est et négative vers l'Ouest.

- I : l'inclinaison du champ, angle entre \vec{R}_h et \vec{R} .

Dans l'hémisphère magnétique Nord, I est positif car \vec{R} pointe vers le bas. I est nul à l'équateur magnétique, vaut 90° au pôle Nord magnétique (75° N ; 101° O en 2011) et 64° à Strasbourg en 2011. C'est la convention contraire dans l'hémisphère magnétique Sud, I vaut -90° au pôle Sud magnétique (67° S ; 143° E en 2011).

Dans le repère terrestre, le champ de référence est porté par le vecteur unitaire $\vec{\rho} = (L, M, N)$, avec L , M et N , les cosinus directeurs du vecteur champ au lieu de mesure. Ils ont donc pour expression

$$L = \cos I \cos D, \quad M = \cos I \sin D \quad \text{et} \quad N = \sin I. \quad (\text{Eq-1.1})$$

On définit la norme du champ de référence par $\|\vec{R}\| = \sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}}$, que l'on notera simplement R .

A la surface de la Terre, elle varie entre 30 000 nT, au voisinage de l'équateur magnétique, et 60 000 nT à proximité des régions polaires comme le Nord du Canada ou de la Sibérie.

1.2 LES ANOMALIES DU CHAMP MAGNÉTIQUE

1.2.1 Définition du champ d'anomalie

En géophysique, le champ d'anomalie magnétique \vec{C} est défini en toute rigueur comme la différence entre le vecteur champ magnétique terrestre mesuré \vec{B} et le vecteur champ de référence \vec{R} calculé d'après un des modèles globaux (Blakely, 1995)

$$\vec{C} = \vec{B} - \vec{R}. \quad (\text{Eq-1.2})$$

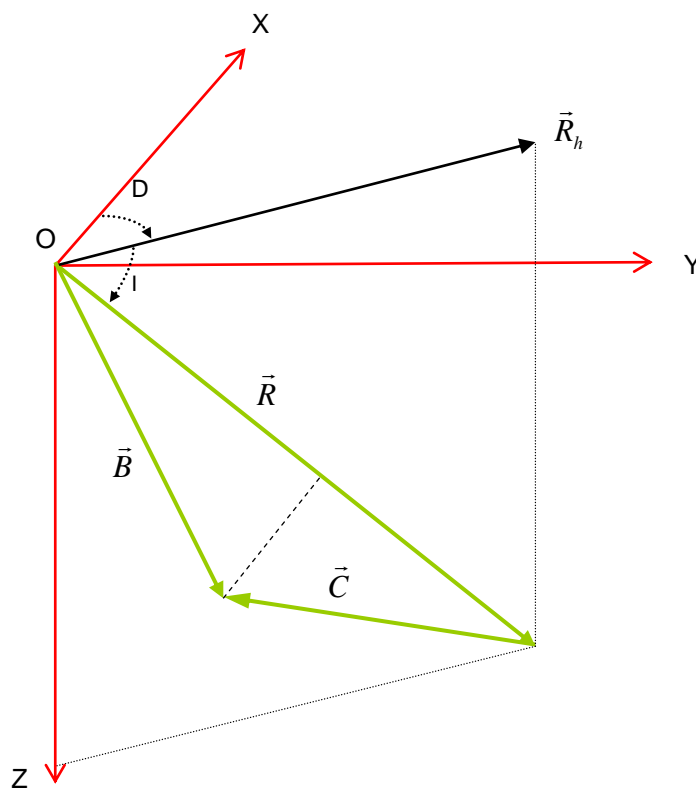


Figure 1.3 : Représentation dans l'espace du vecteur champ d'anomalie magnétique.

Cette grandeur vectorielle est caractéristique d'une modification de l'aimantation rémanente et/ou induite non prévue par les modèles globaux. Celle-ci est liée à la présence d'un objet aux propriétés magnétiques intrinsèques, que nous supposons localisé dans la zone crustale. Cependant, il n'existe pas de capteurs, faciles à mettre en œuvre, en prospection magnétique permettant une mesure précise et continue des trois composantes du champ magnétique par rapport à un référentiel connu, le référentiel géographique local par exemple.

1.2.2 Définition de l'anomalie du champ total

En pratique, le magnéticien mesure uniquement la norme $\|\vec{B}\| = \sqrt{\vec{B} \cdot \vec{B}}$, notée plus simplement B , tandis que les modèles de référence nous fournissent \vec{R} au point de mesure.

Il existe deux grands types de capteurs magnétiques donnant la valeur de B :

- i. Les magnétomètres absolus à protons à effet Overhauser (Abragam, 1961) qui exploitent la résonance magnétique du proton (Jensen, 1965 ; Primdhal, 2000) ou bien les magnétomètres à pompage optique (à base de césium, rubidium ou hélium) (Reford et Sumner, 1964 ; Slack, 1967) basés sur l'effet Zeeman. Dans ces deux cas, les instruments mesurent uniquement l'amplitude B du champ.
- ii. Les magnétomètres à vanne de flux ou « *fluxgate* » permettent de mesurer l'intensité du champ magnétique dans une direction donnée (Primdhal, 1979 ; Ripka, 2000). Il est possible de mesurer localement l'intensité du champ magnétique dans chacune des trois directions orthogonales de l'espace. Cependant, la difficulté de les orienter par rapport à un référentiel bien déterminé empêche la détermination directe des trois composantes du vecteur magnétique (Telford et al., 1990). C'est pourquoi, il est d'usage de calculer la norme de ces trois composantes, qui, une fois calibrée (Munsch et al., 2007), permet d'obtenir la grandeur scalaire B . Les développements instrumentaux récents couplant ces magnétomètres avec des capteurs d'attitude pourraient apporter des réponses à cette difficulté.

Ces limitations liées à l'instrumentation nous contraignent à définir une grandeur scalaire d'anomalie (Blakely, 1995)

$$F = B - R.$$

(Eq-1.3)

Cette grandeur est l'intensité du champ mesurée sur le terrain, à laquelle l'on soustrait l'intensité du champ de référence au même point de mesure. La terminologie exacte de F serait « *Anomalie de l'Intensité du Champ Magnétique terrestre* », que l'on abrègera en AICM et que l'on nomme classiquement de façon plus succincte « *anomalie du champ total* ».

A priori, cette grandeur, définie comme une différence de norme, ne porte plus d'information angulaire. Cependant, le fait qu'elle puisse être positive ou négative peut être interprété comme une propriété directionnelle donc angulaire. Nous allons le montrer au paragraphe suivant.

1.2.3 Développement limité de l'anomalie du champ total

Si l'on note C la norme de \vec{C} , il est évident que $F \neq C$. Cependant, on souhaite établir une relation entre ces deux grandeurs puisque c'est la grandeur C qui porte l'information sur la source. D'après les définitions 1.3 et 1.2, il vient

$$F = \|\vec{R} + \vec{C}\| - R. \quad (\text{Eq-1.4})$$

Faisons intervenir un produit scalaire

$$\|\vec{R} + \vec{C}\| = \sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R} + 2(\vec{C} \cdot \vec{R}) + \vec{C} \cdot \vec{C}}. \quad (\text{Eq-1.5})$$

En factorisant par la norme du champ de référence et en détaillant ce produit scalaire, on obtient

$$\|\vec{R} + \vec{C}\| = R \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \frac{C}{R} + \frac{C^2}{R^2}}, \quad (\text{Eq-1.6})$$

avec α l'angle entre les vecteurs \vec{C} et \vec{R} .

Pour alléger les calculs, on pose $p = \frac{C}{R}$ et $a = 2 \cos \alpha$; il vient alors

$$\frac{\|\vec{R} + \vec{C}\|}{R} = (1 + ap + p^2)^{1/2}. \quad (\text{Eq-1.7})$$

On suppose pour la suite que l'intensité du champ d'anomalie magnétique est très faible par rapport au champ de référence.

En effet, l'amplitude des anomalies magnétiques s'étale typiquement de quelques nT au millier de nT, excédant très rarement les 10 000 nT. Le champ de référence vaut en moyenne à la surface de la Terre environ 50 000 nT. Ainsi, on peut écrire $C \ll R$, dans les conditions habituelles des prospections magnétiques. Il devient alors possible de faire un développement limité de l'équation 1.7 en considérant $p \ll 1$. Sailhac (1999, équation 1.11) a calculé ce développement à l'ordre 3 ; voici après calculs l'expression que nous avons obtenu à l'ordre 5 en p

$$\begin{aligned} \frac{\|\vec{R} + \vec{C}\|}{R} = & 1 + \frac{1}{2}ap + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}a^2\right)p^2 + \left(-\frac{1}{4}a + \frac{1}{16}a^3\right)p^3 + \left(-\frac{1}{8} + \frac{3}{16}a^2 - \frac{5}{128}a^4\right)p^4 \\ & + \left(\frac{3}{16}a - \frac{5}{32}a^3 + \frac{7}{256}a^5\right)p^5 + O(p^6). \end{aligned}$$

Remplaçons p et a par leurs valeurs

$$\begin{aligned} \frac{\|\vec{R} + \vec{C}\|}{R} = & 1 + \frac{C}{R} \cos \alpha + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right) \left(\frac{C}{R} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos^3 \alpha \right) \left(\frac{C}{R} \right)^3 + \left(-\frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cos^2 \alpha - \frac{5}{8} \cos^4 \alpha \right) \left(\frac{C}{R} \right)^4 \\ & + \left(\frac{3}{8} \cos \alpha - \frac{5}{4} \cos^3 \alpha + \frac{7}{8} \cos^5 \alpha \right) \left(\frac{C}{R} \right)^5 + O\left(\frac{C}{R} \right)^6. \end{aligned}$$

Or d'après l'égalité 1.4 $F = \|\vec{R} + \vec{C}\| - R$, donc

$$\begin{aligned} F = & C \cos \alpha + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right) \frac{C^2}{R} + \left(-\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos^3 \alpha \right) \frac{C^3}{R^2} + \left(-\frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cos^2 \alpha - \frac{5}{8} \cos^4 \alpha \right) \frac{C^4}{R^3} \\ & + \left(\frac{3}{8} \cos \alpha - \frac{5}{4} \cos^3 \alpha + \frac{7}{8} \cos^5 \alpha \right) \frac{C^5}{R^4} + O\left(\frac{C^6}{R^5} \right). \end{aligned} \quad (\text{Eq-1.8})$$

1.2.4 Premier terme du développement limité : définition de l'AICM1

Classiquement, on se limite à l'ordre 1 de ce développement (Blakely, 1995). Ce premier terme du développement limité, noté F_1 et nommé AICM1, est assimilé à F

$$F \approx F_1. \quad (\text{Eq-1.9})$$

Son expression, bien connue, est donc déduite de l'équation 1.8

$$F_1 = C \cos \alpha. \quad (\text{Eq-1.10})$$

Géométriquement, le terme F_1 peut donc être considéré comme la projection du champ d'anomalie dans la direction du vecteur champ de référence, ainsi

$$F_1 = \vec{\rho} \cdot \vec{C}. \quad (\text{Eq-1.11})$$

Par souci de clarté dans la suite du propos, nous nommerons « *anomalie de projection* » la grandeur F_1 afin de la distinguer de l'anomalie du champ total F .

Il est aisé de remarquer que F_1 est un scalaire positif ou négatif, son signe dépend de la valeur de α compris dans l'intervalle $[0, 2\pi]$:

- Si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, l'anomalie est dite « *positive* », le vecteur \vec{C} est globalement dans le même sens que \vec{R} . La contribution de \vec{C} a donc pour effet d'augmenter l'intensité du

champ de référence. Dans ce cas, les grandeurs F et F_1 sont toutes les deux positives, comme le montre la **figure 1.4**.

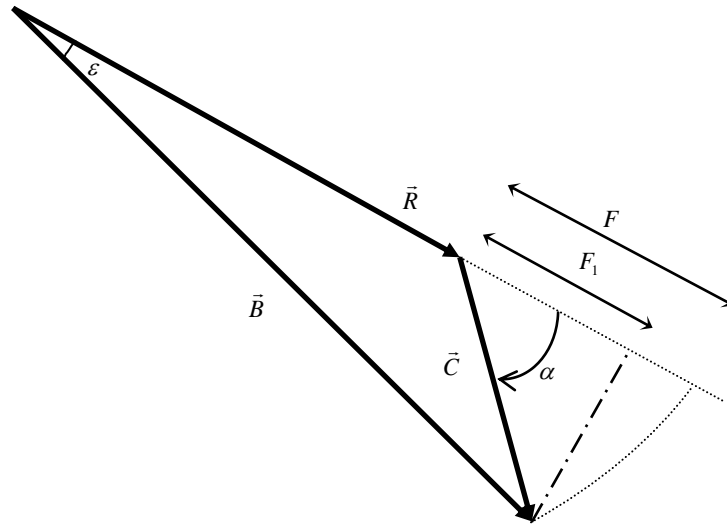


Figure 1.4 : Représentation géométrique de l'anomalie de l'intensité du champ magnétique et de son approximation à l'ordre 1, cas où $0 < F_1 < F$.

- Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, l'anomalie est dite « *négative* », le vecteur \vec{C} est globalement dans le sens opposé à \vec{R} . La contribution du champ d'anomalie diminue l'intensité du champ de référence. Dans ce cas, les grandeurs F et F_1 sont toutes les deux négatives, comme le montre la **figure 1.5**.

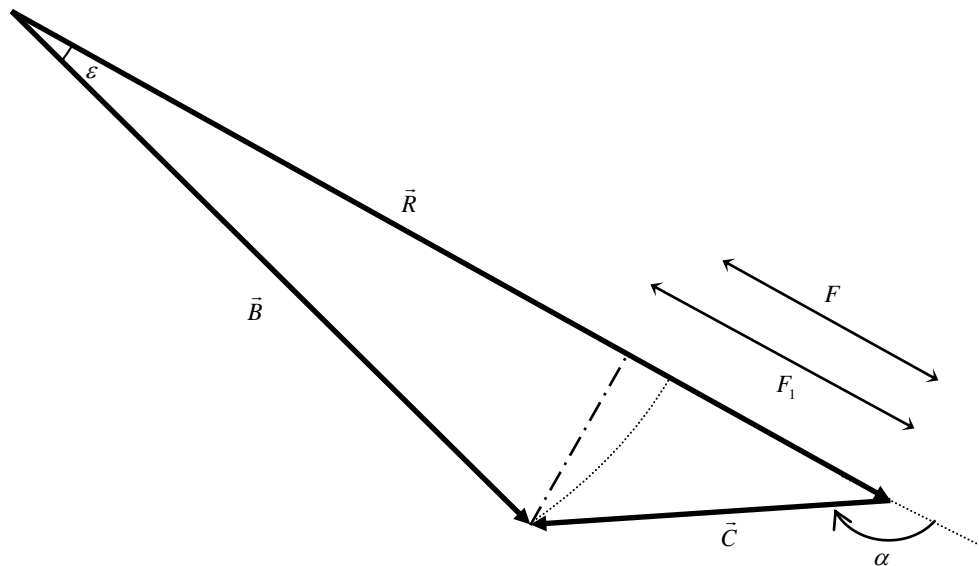


Figure 1.5 : Représentation géométrique de l'anomalie de l'intensité du champ magnétique et de son approximation à l'ordre 1, cas où $F_1 < F < 0$.

Les équations **1.9** et **1.11** montrent que F_1 revêt une importance toute particulière pour les méthodes magnétiques. En effet, cette fonction relie simplement F , la mesure de l'anomalie

magnétique sur le terrain, à C , la norme du champ d'anomalie. C'est donc cette grandeur qui permet le passage à la théorie des méthodes potentielles et, plus globalement, à l'électromagnétisme. Cette remarque justifie l'étude menée au chapitre suivant basée sur les équations de Maxwell vérifiées par le vecteur champ d'anomalie \vec{C} . Elle justifie aussi toutes les transformations propres aux méthodes potentielles effectuées sur les cartes d'anomalie. Comme l'approximation **1.9** est couramment vérifiée, transformer l'AICM ou l'AICM1 revient en pratique souvent au même. Ce point sera illustré et parfois nuancé aux chapitres suivants.

Il est donc plus pertinent d'écrire le développement limité de F en fonction de l'anomalie de projection F_1 . La transformation du développement **1.8** donne

$$F = F_1 + (C^2 - F_1^2) \frac{1}{2R} + (F_1^3 - C^2 F_1) \frac{1}{2R^2} + \left(3C^2 F_1^2 - \frac{C^4}{2} - \frac{5}{2} F_1^4 \right) \frac{1}{4R^3} + \left(\frac{3}{2} F_1 C^4 - 5C^2 F_1^3 + \frac{7}{2} F_1^5 \right) \frac{1}{4R^4} + O\left(\frac{C^6}{R^5}\right). \quad (\text{Eq-1.12})$$

De plus, comme dans notre étude nous recherchons une estimation de l'erreur commise dans l'approximation **1.9**, il est plus justifié d'écrire le développement précédent comme suit

$$\frac{F - F_1}{R} = (C^2 - F_1^2) \frac{1}{2R^2} + (F_1^3 - C^2 F_1) \frac{1}{2R^3} + \left(3C^2 F_1^2 - \frac{C^4}{2} - \frac{5}{2} F_1^4 \right) \frac{1}{4R^4} + \left(\frac{3}{2} F_1 C^4 - 5C^2 F_1^3 + \frac{7}{2} F_1^5 \right) \frac{1}{4R^5} + O\left(\frac{C^6}{R^6}\right), \quad (\text{Eq-1.13})$$

que l'on peut mettre sous la forme plus compacte

$$\boxed{\frac{F - F_1}{R} = \sin^2 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{C}{R} \right)^{n+2} P_n(\cos \alpha)}, \quad (\text{Eq-1.14})$$

avec P_n un polynôme de degré n en $\cos \alpha$.

En particulier,

$$P_0 = \frac{1}{2}, \quad P_1 = -\frac{2}{4} \cos \alpha, \quad P_2 = \frac{1}{8} (-1 + 5 \cos^2 \alpha), \quad P_3 = \frac{1}{16} (6 \cos \alpha - 14 \cos^3 \alpha) \quad \text{et} \quad P_4 = \frac{1}{32} (2 - 28 \cos^2 \alpha + 42 \cos^4 \alpha).$$

De façon général, nous avons établi que

• pour n pair

$$P_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left((-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\binom{n}{n/2}}{n/2 + 1} + (-1)^n \sum_{i=1}^{n/2} N_{2i}^{n/2-i} \cos^{2i} \alpha \right), \quad (\text{Eq-1.15})$$

• pour n impair

$$P_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left((-1)^n \sum_{k=0}^{(n-1)/2} N_{2k+1}^{(n-1)/2-k} \cos^{2k+1} \alpha \right), \quad (\text{Eq-1.16})$$

avec $N_j^k = \frac{2}{j} (-1)^k \binom{2(j+k)+1}{j-1} \binom{2k+j}{k}$ un coefficient associé aux nombres de Catalan (Hoggatt, 1977) et $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$, le coefficient binomial de l'analyse combinatoire.

Ce développement fait intervenir C , nous verrons au chapitre suivant qu'il est possible, sous certaines conditions, de calculer cette norme à partir de F_1 .

1.2.5 Second terme du développement limité : définition de l'AICM2

Intéressons nous à l'anomalie d'ordre 2 ; son expression est déduite de l'équation 1.8

$$F_2 = C \cos \alpha + \frac{C^2}{2R} \sin^2 \alpha. \quad (\text{Eq-1.17})$$

Ce terme sera désigné comme l'AICM2 en référence au deuxième ordre du développement limité, son expression en fonction de F_1 sera utile pour la suite

$$F_2 = F_1 + (C^2 - F_1^2) \frac{1}{2R}. \quad (\text{Eq-1.18})$$

F_2 apporte une information précieuse car permet de quantifier, à l'ordre 2, l'approximation 1.9. Dans certains cas de figure, il semble important de tenir compte du deuxième ordre du développement limité en particulier pour les cas où le vecteur champ d'anomalie forme un angle proche de 90° avec le champ de référence. L'erreur commise est alors maximale, puisque dans cette situation $F_1 = 0$ mais F n'est pas forcément nulle comme l'illustre la **figure 1.6**.

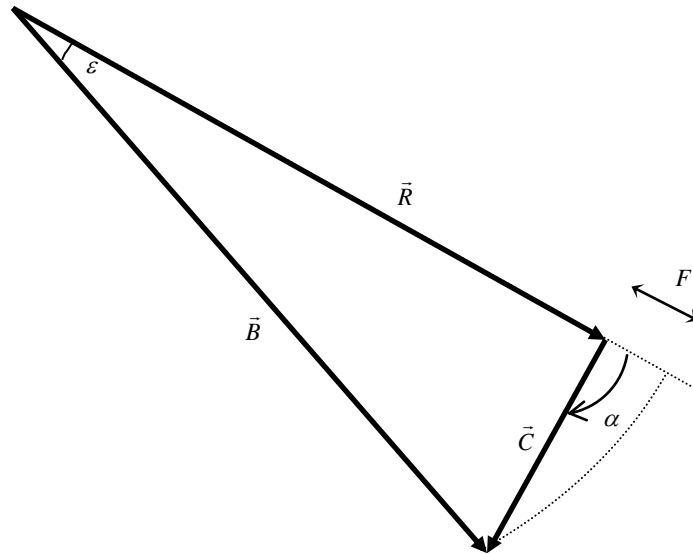


Figure 1.6 : Représentation géométrique de l'anomalie de l'intensité du champ magnétique et de son approximation à l'ordre 1, cas où $F_1 = 0$ et $F > 0$.

Géométriquement, F_2 peut être compris comme la somme de la projection du champ d'anomalie dans la direction du vecteur champ de référence et du carré de la projection dans la direction orthogonale à ce dernier divisé par deux fois par la norme du champ de référence. Ces deux axes de projection sont représentés sur la **figure 1.7**.

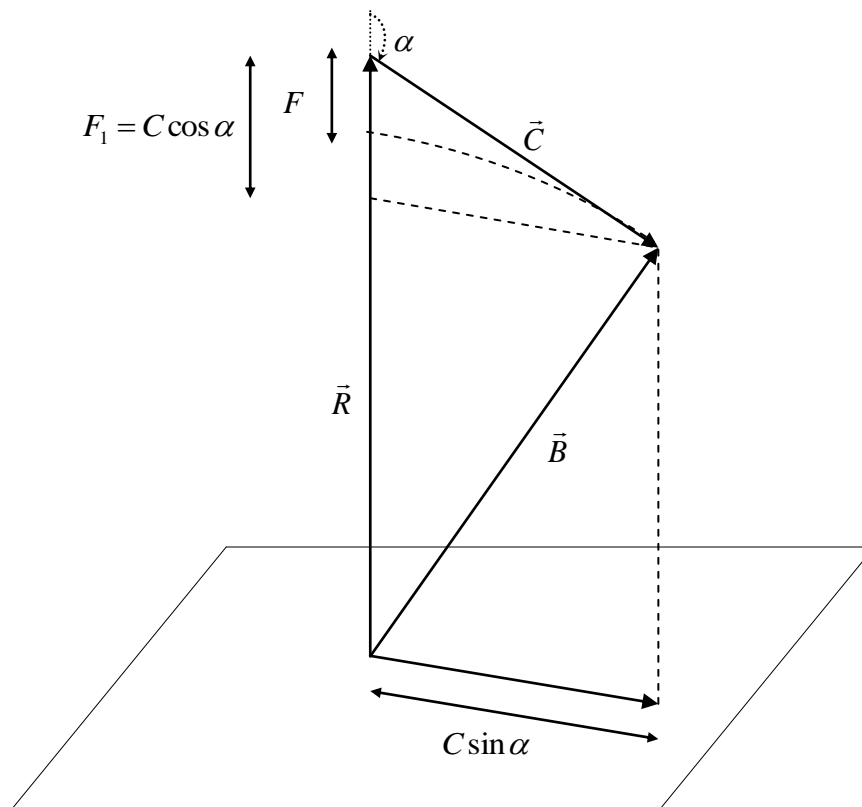


Figure 1.7 : Représentation dans l'espace du champ d'anomalie et de ses projections.

Cependant la fonction F_2 , contrairement à F_1 , ne permet plus de relier simplement le vecteur champ d'anomalie à la mesure F acquise sur le terrain ; c'est pourquoi dans toute notre étude nous garderons la grandeur F_1 . Cependant le développement limité **1.12** reste pertinent afin de quantifier l'approximation **1.9**. Ceci est traité dans la suite de notre discussion.

1.2.6 Formule de récurrence pour F

On a obtenu à l'équation **1.18** le développement limité de F à l'ordre 2 suivant

$$F_2 = F_1 + \frac{1}{2R}(C^2 - F_1^2).$$

L'idée est de rendre cette formule itérative pour obtenir facilement le développement de F à l'ordre k quelconque, que l'on notera F_k avec k un entier naturel, c'est-à-dire de l'ordre de $\frac{C^k}{R^{k-1}}$. Cela permettrait de quantifier à l'ordre k l'approximation **1.9** et d'accéder facilement à la valeur exacte de F_1 .

Il est facile de vérifier que chaque ordre du développement limité **1.12** peut être obtenu de façon itérative. En effet, pour obtenir l'ordre $k+1$ du développement de F_{k+1} , il suffit de remplacer le terme itératif par F_k . Ainsi, l'expression générale de F_{k+1} s'écrit simplement

$$F_{k+1} = F_1 + \frac{1}{2R}(C^2 - F_k^2) + O\left(\frac{C^{k+1}}{R^k}\right) \text{ avec } k > 1. \quad (\text{Eq-1.19})$$

Ainsi, cette formule de récurrence permet d'accéder facilement à F_2 , F_3 et F_4 :

- $F_2 = F_1 + \frac{1}{2R}(C^2 - F_1^2) + O\left(\frac{C^3}{R^2}\right),$
- $F_3 = F_1 + \frac{1}{2R}(C^2 - F_2^2) + O\left(\frac{C^4}{R^3}\right) = F_1 + \frac{1}{2R}\left(C^2 - \left(F_1 + \frac{1}{2R}(C^2 - F_1^2)\right)^2\right) + O\left(\frac{C^4}{R^3}\right),$
- $F_4 = F_1 + \frac{1}{2R}(C^2 - F_3^2) + O\left(\frac{C^5}{R^4}\right) = F_1 + \frac{1}{2R}\left(C^2 - \left(F_1 + \frac{1}{2R}\left(C^2 - \left(F_1 + \frac{1}{2R}(C^2 - F_1^2)\right)^2\right)\right)^2\right) + O\left(\frac{C^5}{R^4}\right).$

Ces opérations peuvent être facilement implémentées numériquement par une simple boucle *for* et évitent les développements limités longs, fastidieux et inexploitablement numériquement.

1.2.7 Application de la formule de récurrence : passage à la limite

Nous avons expliqué qu'une prospection magnétique au sol ou aéroportée permet de mesurer F , à défaut d'accéder directement au vecteur \vec{C} , pourtant plus intéressant. A priori, la mesure ne permet pas d'accéder aux différents F_k . Cependant, la relation **1.19** fait intervenir le terme F_1 , elle peut donc être exploitée afin d'établir la relation exacte entre F et F_1 .

Ainsi, en faisant tendre n vers l'infini dans l'équation **1.19**, on a alors $F_{k+1} \rightarrow F$ et $F_k \rightarrow F$, la relation de récurrence s'écrit alors

$$F = F_1 + \frac{1}{2R}(C^2 - F^2).$$

On en déduit l'expression exacte de F_1

$$\boxed{F_1 = F - \frac{1}{2R}(C^2 - F^2).} \quad (\text{Eq-1.20})$$

Cette expression évoque une équation énoncée, mais non démontrée, dans l'article de Lourenço et Morrison (Lourenço, 1973, équation **22**). Ils la présentent comme une relation itérative, alors qu'elle constitue son passage à la limite.

Remarquons qu'il est possible de démontrer plus simplement cette relation.

Partant de la définition **1.2**, il vient $\vec{B} = \vec{R} + \vec{C}$, on déduit donc que $B^2 = R^2 + C^2 + 2\vec{R} \cdot \vec{C}$. Or d'après la définition **1.11**, on peut écrire que $F_1 = \frac{\vec{R}}{R} \cdot \vec{C}$, que l'on injecte dans l'expression

précédente $B^2 = R^2 + C^2 + 2F_1R$. Cela entraîne $F_1 = \frac{1}{2R}(B^2 - R^2 - C^2)$. En injectant la définition

de F exposée dans l'égalité **1.3**, il vient $F_1 = F - \frac{1}{2R}(2BR - R^2 - B^2 + C^2)$.

On retrouve alors l'équation **1.20**.

Ce résultat important entraîne trois conséquences intéressantes :

- i. La différence $C^2 - F^2$ est toujours positive. En effet d'après les définitions **1.2** et **1.3**

$$C^2 - F^2 = B^2 + R^2 - 2\vec{B} \cdot \vec{R} = (B^2 + R^2 - 2BR \cos \varepsilon), \text{ ce qui se simplifie en}$$

$$C^2 - F^2 = 2BR(1 - \cos \varepsilon), \text{ avec } \varepsilon \text{ l'angle entre les vecteurs } \vec{B} \text{ et } \vec{R}.$$

On a bien $C^2 - F^2 \geq 0$, on en déduit le résultat intéressant suivant

$$\boxed{F_1 \leq F.} \quad (\text{Eq-1.21})$$

Ainsi dans l'approximation classique **1.9**, on commet une surestimation de l'anomalie de référence F_1 lorsqu'on l'égale à l'anomalie F . Ceci est illustré aux **figures 1.4** et **1.5**.

- ii. La somme de la série **1.14** peut s'écrire d'une autre façon

$$\sin^2 \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{C}{R} \right)^{n+2} P_n(\cos \alpha) = \frac{1}{2R^2} (C^2 - F^2). \quad (\text{Eq-1.22})$$

- iii. On peut estimer l'erreur commise dans l'approximation habituelle de l'équation **1.9**.

Soit $\Delta F = F - F_1$, alors il vient

$$\boxed{\Delta F = \frac{1}{2R} (C^2 - F^2).} \quad (\text{Eq-1.23})$$

Cette approximation est généralement vérifiée au pourcent, dans les chapitres suivants nous appliquerons le résultat important **1.20** à des données synthétiques et expérimentales. Mais avant cela, examinons de façon générale, les bornes encadrant ΔF .

1.2.8 Étude numérique de la différence $F - F_1$ à F constant

Sur les figures précédentes, l'angle entre les vecteurs \vec{B} et \vec{R} est noté ε , nous avons donc

$$F_1 = B \cos \varepsilon - R. \quad (\text{Eq-1.24})$$

Puis en utilisant la définition **1.3**

$$F_1 - F = B(\cos \varepsilon - 1), \quad (\text{Eq-1.25})$$

il s'ensuit

$$F_1 - F = (R + F)(\cos \varepsilon - 1). \quad (\text{Eq-1.26})$$

On en déduit un encadrement de $F_1 - F$ sachant que ε varie entre 0 et π

$$-2B < F_1 - F < 0. \quad (\text{Eq-1.27})$$

Soit $-b$ une borne inférieure de l'encadrement, cherchons l'angle ε_0 correspondant

$$-b < F_1 - F < 0. \quad (\text{Eq-1.28})$$

Il vient alors

$$\cos \varepsilon_0 > 1 - \frac{b}{B}, \quad (\text{Eq-1.29})$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_0 = \arccos \left(1 - \frac{b}{R + F} \right). \quad (\text{Eq-1.30})$$

En première approximation, cela devient

$$\varepsilon_0 \approx \left(\frac{2b}{R + F} \right)^{1/2}. \quad (\text{Eq-1.31})$$

Si l'on pose $R = 50000$ nT, $F = 500$ nT et $b = 5$ nT alors on obtient $\varepsilon_0 \approx 0.8^\circ$. À présent, si l'on autorise $b = 500$ nT alors on obtient $\varepsilon_0 \approx 8^\circ$. L'angle entre \vec{B} et \vec{R} est donc de façon générale très faible, même si l'on commet une erreur de 100 % dans l'approximation $F \approx F_1$. De cette conclusion et de l'équation **1.25**, on peut donc donner un ordre de grandeur de cette erreur pour les petits angles exprimés en degrés

$$F_1 - F \approx -\frac{\pi^2}{180^2} B \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (\text{Eq-1.32})$$

Pour évaluer cet écart avec la relation **1.32**, il faudrait connaître ε . En pratique, cela n'est pas possible, sauf par une étude globale du champ d'anomalie magnétique terrestre. En effet, les modèles globaux développés en harmoniques sphériques permettraient de calculer d'une part \vec{R} en conservant son développement jusqu'à $N_1 < N$ et d'autre part \vec{B} en prenant son développement complet, jusqu'à N .

Il est intéressant de déduire la valeur de C à partir de l'angle ε ; sachant la définition **1.2**, on a

$$C = (B^2 + R^2 - 2BR \cos \varepsilon)^{1/2}. \quad (\text{Eq-1.33})$$

La norme C est donc une fonction croissante de ε qui s'écrit d'après le résultat **1.30**

$$C = ((B - R)^2 + 2bR)^{1/2}. \quad (\text{Eq-1.34})$$

En reprenant l'application numérique avec $b = 0$ nT, on obtient $C = 500$ nT ; avec $b = 5$ nT, on obtient $C \approx 870$ nT et avec $b = 500$ nT, cela peut conduire jusqu'à $C \approx 7100$ nT. De cet exemple, il apparaît que même une faible erreur commise dans l'approximation engendre un écart important entre C et F . Finalement, il faut retenir que l'erreur commise sur F_1 dégrade l'information sur le champ d'anomalie.

1.2.9 Étude numérique de la différence $F - F_1$ à C constant

En vertu des égalités **1.4** et **1.5**, il ressort facilement que

$$F = (R^2 + C^2 + 2RC \cos \alpha)^{1/2} - R. \quad (\text{Eq-1.35})$$

Or, il est clair que $R - C > 0$ et comme α varie de 0 à π , on en déduit l'encadrement suivant

$$-C < F < C. \quad (\text{Eq-1.36})$$

Sachant la relation **1.10**, on en déduit

$$F - F_1 = (R^2 + C^2 + 2RC \cos \alpha)^{1/2} - R - C \cos \alpha. \quad (\text{Eq-1.37})$$

Une étude classique de fonction prouve que cette différence est nulle en $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$ et qu'elle est positive dans le reste du domaine. Le maximum de cette différence est atteint pour $\alpha_0 = \arccos\left(-\frac{C}{2R}\right)$ et vaut $-\frac{C^2}{2R}$. Si l'on pose $R = 50000$ nT, $C = 700$ nT et $b = 5$ nT alors on

obtient $-\frac{C^2}{2R} \approx -4.9$ nT et $\alpha_0 = 90,4^\circ$. Cela confirme l'hypothèse proposée au **paragraphe 1.3.4**,

l'erreur commise est bien maximale pour un angle α proche de 90° . Dans ce cas, $B(\alpha_0) = R$ et

sachant que $B \cos \varepsilon(\alpha_0) - R = C \cos \alpha_0$, alors $\varepsilon(\alpha_0) = \arccos\left(1 - \frac{C^2}{2R^2}\right) \approx 0,8^\circ$, valeur a priori raison-

nale. Remarquons enfin que dans l'équation **1.20** permettant le calcul de F_1 , connaissant C , on

retrouve bien $F - F_1 = \frac{C^2}{2R}$, pour $F = 0$.

1.3 MESURE TENSORIELLE DU GRADIENT MAGNÉTIQUE

Il y a plusieurs avantages à mesurer directement les gradients du champ magnétique total plutôt que le champ total lui-même (Hardwick, 1984 ; Schmidt et Clark, 2006). En effet, comme les premiers se comportent comme les signaux dérivés du second, leurs amplitudes présentent de plus faibles variations. En pratique, la mesure gradiométrique aéroportée est donc moins sensible aux manœuvres de l'avion. De plus, elle ne contient pas les variations du champ au cours du temps et donc ne nécessite pas les corrections temporelles. De plus, elle résout mieux les anomalies de proche surface et atténue les anomalies régionales. Beaucoup de levés aéromagnétiques utilisent plusieurs gradiomètres pour obtenir un ou plusieurs gradients et le plus souvent le gradient vertical est mesuré.

Le développement récent des dispositifs supraconducteurs à interférence quantique SQUID (« *Superconducting Quantum Interference Device* ») permettent de mesurer un gradient magnétique avec une sensibilité de l'ordre de 10^{-4} nT.m⁻¹ (Zimmerman et Campbell, 1975 ; Schmidt et Clark, 1998 ; Stoltz et al., 2006 ; Fitzgerald et al., 2010). Cependant, ces magnétomètres, aux propriétés supraconductrices, présentent certaines difficultés de mise en œuvre, en particulier la logistique complexe liée à l'utilisation de liquides cryogéniques. En outre, la compensation de l'effet magnétique de l'avion reste un problème (Hardwick, 1984; Fitzgerald et Holstein, 2006).

D'un point de vue théorique, il existe neuf dérivées possibles pour un vecteur, chaque composante du champ magnétique est dérivée selon trois axes orthogonaux qui forment le tenseur du gradient du champ magnétique (Nelson, 1988; Schmidt et Clark, 1998). Ainsi, malgré les problèmes d'orientation des capteurs mentionnés au **paragraphe 1.2.1**, la mesure des gradients dans toutes les directions de l'espace permet d'accéder à un tenseur des neuf gradients magnétiques.

Soient B_x , B_y et B_z les trois composantes du champ magnétique total \vec{B} dans le repère géographique local. Chacune de ces trois composantes peut être dérivée selon les directions x , y et z de

l'espace. On peut ainsi définir le *Tenseur du Gradient Magnétique (TGM)*, par la multiplication matricielle suivante (Nelson, 1988)

$$\mathbf{TGM} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (\text{Eq-1.38})$$

Cependant, comme les gradients du champ total sont généralement beaucoup plus faibles que les gradients du champ d'anomalie, le tenseur **TGM** peut être assimilé au tenseur des gradients du champ d'anomalie produit par un corps quelconque

$$\mathbf{TGM} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial C_x}{\partial x} & \frac{\partial C_y}{\partial x} & \frac{\partial C_z}{\partial x} \\ \frac{\partial C_x}{\partial y} & \frac{\partial C_y}{\partial y} & \frac{\partial C_z}{\partial y} \\ \frac{\partial C_x}{\partial z} & \frac{\partial C_y}{\partial z} & \frac{\partial C_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (\text{Eq-1.39})$$

En toute rigueur, ce tenseur pourrait être calculé en utilisant l'expression **1.2** à partir de modèles IGRF et des valeurs de tenseur mesurées fournies par l'équation **1.38**.

1.4 BILAN - CONCLUSION

Ce premier chapitre nous a permis d'expliciter la diversité des définitions de l'anomalie magnétique. Cette notion recouvre trois grandeurs différentes :

- i. le champ d'anomalie magnétique \vec{C} , dont la mesure précise et continue n'est pas encore possible ;
- ii. l'anomalie du champ total F ou anomalie de l'intensité du champ magnétique (AICM), c'est cette grandeur scalaire qui est couramment mesurée dans les prospections magnétiques ;

- iii. l'anomalie de projection F_1 ou anomalie de l'intensité du champ magnétique à l'ordre 1 (AICM1). Cette fonction directement reliée au champ d'anomalie est essentielle pour les méthodes potentielles.

En toute rigueur $F \neq F_1$, le problème est donc de savoir dans quelle mesure F est un bon estimateur de F_1 . Nous tenterons de répondre à cette question au chapitre suivant à travers l'étude d'une source d'anomalie dipolaire plongée dans le champ terrestre. Cette source est fondamentale en magnétostatique. Nous illustrerons la propriété **1.21** puis mettrons à profit la relation **1.20** pour diminuer l'écart entre F et F_1 .

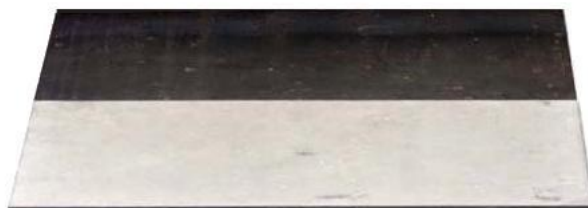
Cette fonction F_1 servira de point de départ pour construire toutes les fonctions magnétiques caractéristiques. Enfin, la notion de tenseur introduite à la **section 1.3** sera généralisée.

Chapitre II

ÉTUDE DU DIPÔLE MAGNÉTIQUE DANS LE DOMAINE SPATIAL

2.1	CHAMP ET POTENTIELS DIPOLAIRES	50
2.1.1	<i>Moment magnétique élémentaire</i>	50
2.1.2	<i>Potentiel vecteur magnétique dipolaire</i>	52
2.1.3	<i>Potentiel scalaire magnétique dipolaire</i>	54
2.1.4	<i>Champ magnétique dipolaire</i>	57
2.2	ANOMALIES DIPOLAIRES	61
2.2.1	<i>Anomalie de l'Intensité du Champ Magnétique : AICM.....</i>	61
2.2.2	<i>Calcul de l'anomalie de l'intensité du champ magnétique à l'ordre 1.....</i>	64
2.2.3	<i>Calcul de l'anomalie de l'intensité du champ magnétique à l'ordre 2.....</i>	66
2.2.4	<i>Comparaison entre l'AICM et l'AICM1.....</i>	67
2.3	SUPERPOTENTIELS DIPOLAIRES	69
2.3.1	<i>Superpotentiel vecteur magnétique</i>	69
2.3.2	<i>Superpotentiel scalaire magnétique</i>	71
2.4	RELATIONS DE PASSAGE ENTRE LES FONCTIONS MAGNÉTIQUES.....	73
2.4.1	<i>Superpotentiel vecteur et potentiels</i>	73
2.4.2	<i>Anomalie de projection et potentiels vecteurs.....</i>	74
2.4.3	<i>Superpotentiel scalaire et potentiels</i>	74
2.4.4	<i>Anomalie de projection et potentiels scalaires</i>	75
2.4.5	<i>Vue synoptique des fonctions magnétiques</i>	76
2.5	UTILISATION DES RELATIONS DE PASSAGE.....	77
2.5.1	<i>Calcul des potentiel et superpotentiel scalaires à partir de l'anomalie</i>	77
2.5.2	<i>Calcul du superpotentiel vecteur magnétique à partir du superpotentiel scalaire.....</i>	77
2.5.3	<i>Calcul du potentiel vecteur magnétique à partir du superpotentiel vecteur.....</i>	78
2.5.4	<i>Calcul du champ d'anomalie magnétique à partir du potentiel vecteur.....</i>	78
2.5.5	<i>Calcul du champ d'anomalie magnétique à partir du potentiel scalaire</i>	78
2.5.6	<i>Calcul du champ d'anomalie magnétique à partir du superpotentiel scalaire.....</i>	78

2.6	TENSEURS MAGNÉTIQUES	79
2.6.1	<i>Calcul du tenseur du gradient magnétique à partir du potentiel magnétique</i>	79
2.6.2	<i>Calcul du tenseur de l'anomalie magnétique à partir du superpotentiel magnétique.</i>	81
2.7	ÉQUATIONS DE POISSON DANS L'ESPACE ENTIER.....	85
2.7.1	<i>Potentiel scalaire magnétique</i>	85
2.7.2	<i>Superpotentiel vecteur magnétique</i>	86
2.7.3	<i>Superpotentiel scalaire magnétique</i>	86
2.7.4	<i>Anomalie de l'intensité du champ magnétique</i>	87
2.7.5	<i>Équations de Poisson et méthodes potentielles.....</i>	87
2.8	ÉQUATIONS DE LAPLACE DANS UN DEMI-ESPACE.....	88
2.8.1	<i>Potentiel scalaire magnétique</i>	88
2.8.2	<i>Superpotentiels magnétiques.....</i>	88
2.8.3	<i>Anomalie de l'intensité du champ magnétique</i>	89
2.9	SOLUTION DE L'ÉQUATION DE LAPLACE DANS UN DEMI-ESPACE	90



Steel-Magnesium Dipole (N/S)

Carl André, artiste américain minimaliste né en 1935

Chapitre II : ÉTUDE DU DIPÔLE MAGNÉTIQUE DANS LE DOMAINE SPATIAL

Dans ce chapitre, nous appliquons la notion d'anomalie magnétique, introduite au chapitre précédent, au cas particulier d'une anomalie dipolaire. En effet, le dipôle magnétique est la source la plus élémentaire du champ magnétique à partir de laquelle peuvent se modéliser toutes les sources de géométrie plus compliquée. Ainsi, un milieu magnétique peut être assimilé à un ensemble de dipôles magnétiques créés par des boucles de courants de dimensions atomiques.

Nous rappelons d'abord les grandeurs classiques associées au dipôle avant de calculer l'AICM1 et l'AICM2 définies au chapitre précédent. Le *superpotentiel* d'anomalie est introduit de façon originale pour les méthodes potentielles. Il est aussi mis à profit pour introduire un nouvel outil : le *tenseur de l'anomalie magnétique*, différent du tenseur du gradient magnétique. Ses applications en méthodes magnétiques seront détaillées aux **chapitres V et VI**.

L'étude est d'abord menée dans le domaine spatial à trois dimensions puis réduite au plan horizontal, suffisant en pratique. Dans ce chapitre, nous adoptons une approche à la fois théorique et appliquée. En effet, d'une part, l'existence de chacune des fonctions fondamentales des méthodes magnétiques est rigoureusement établie pour le dipôle en partant des équations de Maxwell ; d'autre part, le calcul et la représentation graphique permettent au lecteur de se faire une meilleure idée de ces fonctions. Ces illustrations sont le résultat de simulations numériques menées sous *Matlab* dans le domaine spatial. Les calculs des fonctions dipolaires sont menés partout dans l'espace sauf sur la source. Cependant, le résultat des simulations numériques implémentées sous *Matlab* sera ramené à un plan. Nous avons choisi le plan horizontal d'un repère géographique local d'origine O représenté sur la **figure 1.2**. Ce plan de représentation sera donc défini par les axes *OX* (axe des ordonnées, vers le Nord géographique) et *OY* (axe des abscisses, vers l'Est géographique). Il sera observé depuis les $Z < 0$ pour faire correspondre la représentation graphique aux mesures réelles faites par un observateur au-dessus du sol. Nous travaillerons sur une grille de 100 unités de coté, de pas 0.2 et centrée sur l'origine du repère terrestre. Le dipôle sera situé à 15 unités de profondeur, en (0,0,15).

Par ailleurs, la plupart des graphes sont accompagnés d'un titre indiquant dans le premier groupe de parenthèses l'inclinaison et la déclinaison en degrés du dipôle considéré et dans le second

groupe de parenthèses la moyenne et l'écart type en nT de la fonction représentée. Cela apporte un éclairage supplémentaire, souvent pertinent, sur le comportement de la fonction.

Cette étude sera transposée dans le domaine spectral au chapitre suivant, puis généralisée à des sources prismatiques et quelconques au **chapitre IV**.

2.1 CHAMP ET POTENTIELS DIPOLAIRES

2.1.1 Moment magnétique élémentaire

Soit un dipôle magnétique créé par une boucle de courant C_0 d'intensité I_0 . Son vecteur surface est défini par $\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{C_0} \overrightarrow{OQ} \wedge d\vec{l}$.

Si la boucle C_0 est circulaire, on a $\vec{S} = \frac{1}{2} \left(\oint_{C_0} r^2 d\alpha \right) \vec{n}_s$, avec \vec{n}_s la normale à surface et $d\alpha$ l'élément d'angle de la boucle. L'intégration le long de la boucle donne $\vec{S} = \pi R^2 \vec{n}_s$.

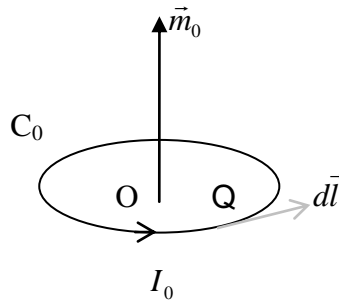


Figure 2.1 : Représentation dans l'espace d'un dipôle magnétique créé par une boucle de courant circulaire.

Le moment dipolaire est défini par $\vec{m}_0 = I_0 \vec{S} = m_0 \vec{n}_s$, avec $m_0 = I_0 \pi R^2$ en $A.m^2$.

Le moment dipolaire de la Terre vaut en moyenne $78.10^{21} A.m^2$. Il est intéressant de rappeler ici l'unité de moment magnétique à l'échelle atomique, produit par un électron sur son orbitale, appelée magnéton de Bohr dont la valeur absolue est

$$\mu_B = \frac{\hbar e}{2m_e}.$$

Avec \hbar la constante de Planck réduite, e la charge élémentaire de l'électron et m_e sa masse, on a

$$\mu_B = 0,9274\,009\,49(80) \cdot 10^{-24} A.m^2.$$

Il est impressionnant de constater que la même physique reste valable sur plus de 40 ordres de grandeur !

Comme l'étude du champ de référence est intéressante dans le référentiel terrestre d'origine O , on représente \vec{m}_0 dans le même repère mais centré sur le dipôle pour faire apparaître ses éléments caractéristiques. Ce repère local, représentée à la **figure 2.2**, est noté $Oxyz$; ses axes sont parallèles au repère de référence $OXYZ$. Nous savons donc que Ox est dirigé vers le Nord géographique, Oy vers l'Est géographique et Oz selon la verticale du lieu considéré, dirigé vers le bas.

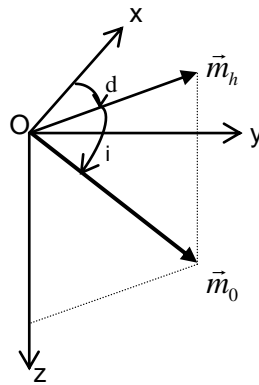


Figure 2.2 : Représentation dans le repère local $Oxyz$ du moment magnétique.

Trois éléments caractéristiques suffisent pour décrire entièrement le moment dipolaire \vec{m}_0 :

- \vec{m}_h : la composante horizontale du moment,
- d : la déclinaison du moment, angle entre Ox et \vec{m}_h ,
- i : l'inclinaison du moment, angle entre \vec{m}_h et \vec{m}_0 .

Dans ce repère, le moment est porté par le vecteur unitaire $\vec{\mu} = (l, m, n)$, avec l , m et n les cosinus directeurs au point considéré du moment magnétique. Ils sont définis de manière analogue aux cosinus directeurs du champ de référence dans l'équation 1.1. Ils ont donc pour expression

$$\begin{aligned} l &= \cos i \cos d, \\ m &= \cos i \sin d, \\ n &= \sin i. \end{aligned} \tag{Eq-2.1}$$

Dans les simulations numériques qui suivent, nous considérons un dipôle induit par le champ magnétique terrestre d'inclinaison 60° et de déclinaison 15° . Dans chaque représentation

graphique, nous montrerons aussi la signature magnétique du même dipôle situé à l'équateur ($I = 0^\circ$) puis au pôle ($I = 90^\circ$).

2.1.2 Potentiel vecteur magnétique dipolaire

Si on appelle \vec{C} le champ magnétostatique créé par le dipôle, alors ce champ vérifie l'équation locale de Maxwell-Thomson

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = 0. \quad (\text{Eq-2.2})$$

Cette équation traduit l'impossibilité d'existence du monopôle magnétique.

Par ailleurs, l'analyse vectorielle montre que pour une fonction vectorielle quelconque \vec{A} , on a la relation $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$. L'équation de Maxwell permet donc de définir au moins localement un potentiel vecteur \vec{A} tel que

$$\vec{C} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (\text{Eq-2.3})$$

Pour assurer l'unicité de ce potentiel, \vec{A} doit vérifier une relation de jauge, par exemple la jauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (\text{Eq-2.4})$$

Le potentiel vecteur $\vec{A}(P)$ créé par la boucle de courant balayée par le point Q, centrée sur l'origine et calculée en P, repéré par $\vec{r} = (x, y, z)$, est donné par

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_0} \frac{I d\vec{l}}{QP}.$$

La **figure 2.3** représente cette boucle de courant.

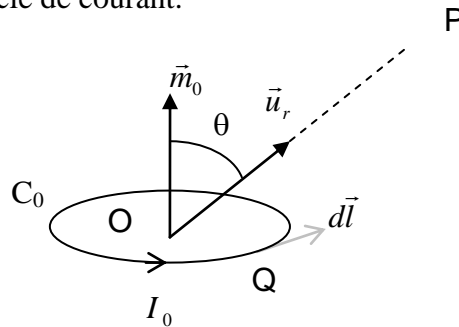


Figure 2.3 : Représentation dans l'espace du dipôle magnétique.

Après calculs, on obtient l'expression classique qui suit

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_0 \times \vec{u}_r}{r^2}} \quad (\text{Eq-2.5})$$

Par ailleurs, il faut rappeler que $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{u}_r}{r^2}$, ce qui permet d'écrire le potentiel sous une forme utile pour la suite

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \times \vec{m}_0. \quad (\text{Eq-2.6})$$

Ce potentiel vecteur peut s'exprimer aussi dans un repère sphérique (r, θ, φ) représenté à la **figure 2.4**. Il est immédiat de vérifier que le potentiel vecteur est orthoradial par rapport au point P, c'est-à-dire perpendiculaire au rayon vecteur en tout point de l'espace

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0 \sin \theta}{r^2} \vec{u}_\varphi.$$

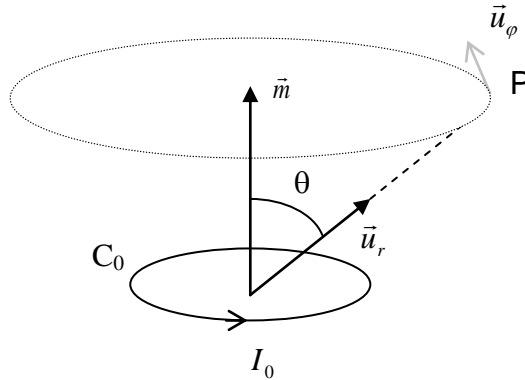


Figure 2.4 : Représentation dans l'espace du dipôle magnétique.

L'orthoradialité du potentiel vecteur dipolaire est due à la condition de jauge de Coulomb. Cela signifie que \vec{A} est un champ à flux conservatif et peut donc lui-même dériver d'un autre potentiel vecteur. Nous utiliserons ce résultat dans le **paragraphe 2.3.1**.

Il est bon de rappeler l'expression du potentiel vecteur en coordonnées cartésiennes dans le repère local $Oxyz$

$$\vec{A}(x, y, z) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \frac{1}{r} \times \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}.$$

Le calcul des dérivations et le produit vectoriel donnent

$$\vec{A}(x, y, z) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} mz - ny \\ nx - lz \\ ly - mx \end{pmatrix}. \quad (\text{Eq-2.7})$$

2.1.3 Potentiel scalaire magnétique dipolaire

Hors des charges et des boucles de courants, les quatre équations de Maxwell dans le vide s'écrivent en statique $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{0}$.

Or l'analyse vectorielle montre que pour une fonction scalaire quelconque f , on a la relation $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$. Par conséquent les deux dernières équations de Maxwell prouvent qu'il existe deux potentiels scalaires électrique et magnétique respectivement V et U tels que

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

et $\vec{C} = -\vec{\nabla} U$. (Eq-2.8)

On sait par ailleurs que le potentiel V créé par un dipôle électrique a pour expression en P

$$V(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p}_0 \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r},$$

avec ϵ_0 la permittivité électrique du vide, $\epsilon_0 = 8.854187 \cdot 10^{-12} \text{ A.s.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$ et \vec{p}_0 le moment dipolaire électrique.

Dans le cas particulier du champ magnétostatique dipolaire, on remarque que celui-ci présente une analogie mathématique complète avec le champ électrostatique créé par un dipôle électrostatique. Ainsi, remplaçant \vec{p}_0 par \vec{m}_0 et $1/\epsilon_0$ par μ_0 , on peut en déduire l'expression du potentiel scalaire magnétique créé par une boucle de courant élémentaire centrée sur l'origine, calculée en \vec{r}

$$U(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m}_0 \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}, \quad (\text{Eq-2.9})$$

avec μ_0 la perméabilité magnétique du vide, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ kg.m.A}^{-2}\text{s}^{-2}$.

$\vec{\nabla}$ est l'opérateur gradient dans le repère choisi, on définit alors l'opérateur de dérivation oblique, dans la direction de l'aimantation par

$$\nabla_\mu = \vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}. \quad (\text{Eq-2.10})$$

Cet opérateur ∇_μ revient à projeter le gradient $\vec{\nabla}$ dans la direction de \vec{m}_0 ; l'équation 2.9 devient

$$U(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} m_0 \nabla_\mu \frac{1}{r}. \quad (\text{Eq-2.11})$$

L'analogie entre les dipôles magnétiques et électriques est représentée sur la **figure 2.5**.

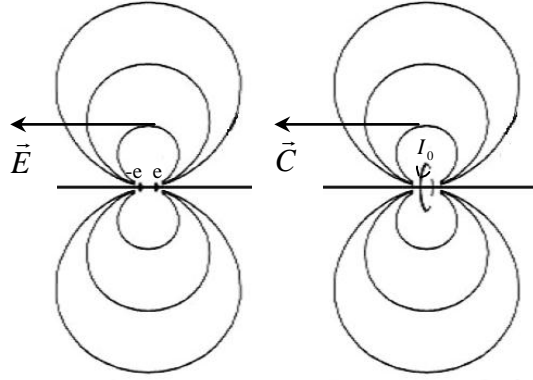


Figure 2.5 : Dipôle électrostatique (à gauche) et dipôle magnétostatique (à droite) générant respectivement des lignes de champs électrique et magnétique.

Il est intéressant de prolonger cette analogie à un autre domaine de la physique décrit aussi par des champs potentiels : la gravitation. Ce champ est utilisé en géophysique au travers de la gravimétrie pour la mesure de la pesanteur terrestre. La source élémentaire de la gravimétrie est la masse ponctuelle de masse volumique ρ' . Pour exprimer le champ gravimétrique de cette source, il suffit d'échanger dans l'expression 2.9 le terme $-\mu_0/(4\pi)\vec{m}_0$ par $G\rho'$ et l'on obtient

$$\vec{g}(\vec{r}) = G\rho' \vec{\nabla} \frac{1}{r}. \quad (\text{Eq-2.12})$$

Cette relation formelle entre le potentiel magnétique et le champ gravimétrique se nomme la *relation de Poisson* (Blakely, 1995)

$$U = -\frac{\mu_0 m_0}{4\pi G \rho'} g_\mu, \quad (\text{Eq-2.13})$$

avec g_μ la composante du champ de pesanteur dans la direction du vecteur aimantation, appelé aussi champ « *pseudo-gravimétrique* » dans la direction de l'aimantation (Baranov, 1957).

Cette relation permet de relier de façon surprenante ces deux domaines de la physique, réunis en géophysique sous le vocable de « *méthodes potentielles* ». Elle peut se généraliser facilement pour

des géométries non dipolaires, à condition de supposer l'aimantation et la densité uniformes. Nous y reviendrons au **chapitre IV**.

Retrouvons l'expression bien connue du potentiel magnétique en coordonnées cartésiennes, elle sera utile pour les simulations numériques qui suivent

$$U(x, y, z) = -\frac{\mu_0}{4\pi} m_0 \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

ce qui donne

$$U(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (lx + my + nz),$$

et finalement

$$U(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_0 \lambda}{r^3}.$$

On pose pour toute la suite $\tilde{m}_0 = \frac{m_0 \mu_0}{4\pi}$ avec \tilde{m}_0 exprimé en T.m³. (Eq-2.14)

Notons au passage que pour toutes les simulations numériques nous prendrons $\tilde{m}_0 = 5.10^5$ nT.m³, ce qui correspond à un objet d'aimantation moyenne.

Il vient donc ce résultat très simple

$$U(\vec{r}) = \tilde{m}_0 \frac{\lambda}{r^3}, \quad \text{(Eq-2.15)}$$

avec

$$\lambda = lx + my + nz = \vec{\mu} \cdot \vec{r}. \quad \text{(Eq-2.16)}$$

Si le dipôle est repéré par $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, il suffit de convoluer le potentiel à l'origine par la distribution de Dirac δ

$$U(\vec{r}) = -\tilde{m}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) * \nabla_{\mu} \frac{1}{r}, \quad \text{(Eq-2.17)}$$

avec « * » le produit de convolution, dont le calcul donne ce résultat tout aussi simple

$$U(\vec{r}) = \tilde{m}_0 \frac{\lambda_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3},$$

avec $\|\vec{r} - \vec{r}_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ et $\lambda_0 = l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = \vec{\mu} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$.

L'opérateur de dérivation oblique étant échangeable dans un produit de convolution, on peut donc écrire le potentiel sous la forme suivante

$$U(\vec{r}) = -\tilde{m}_0 \nabla_\mu \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) * \frac{1}{r}. \quad (\text{Eq-2.18})$$

Mise sous cette forme, cette distribution répond exactement à la définition d'un potentiel newtonien (Pinchard, 1998).

Ces expressions, analogues aux résultats de Smellie (1956) sont intéressantes à double titre : d'abord elles sont plus générales et ensuite elles contiennent un produit de convolution. Celui-ci permettra de justifier le passage dans le domaine spectral dans le chapitre suivant.

La **figure 2.6** représente les potentiels vecteurs et scalaires dipolaires pour trois inclinaisons :

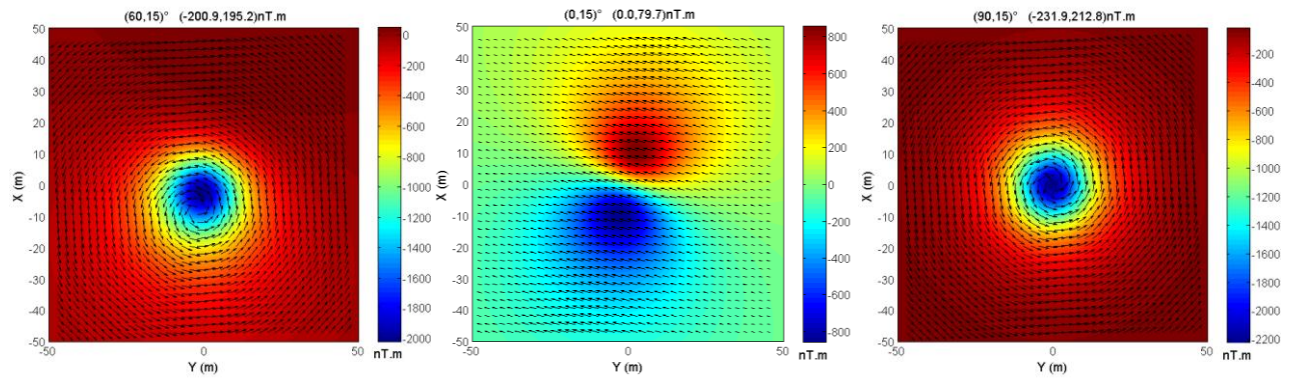


Figure 2.6 : Potentiel d'anomalie magnétique pour différentes inclinaisons.
Les flèches noires montrent les composantes horizontales normées du potentiel vecteur.

Nous remarquons que la moyenne du potentiel d'anomalie est nulle pour une inclinaison nulle et minimum pour une inclinaison de 90°.

2.1.4 Champ magnétique dipolaire

Soit $\vec{C}(P)$ le champ magnétique en P généré par le dipôle ; sachant que hors de la boucle, il n'y a pas de courant alors $\vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{0}$, donc il existe un potentiel scalaire U donné par l'équation 2.8. On peut donc en déduire \vec{C} , en utilisant l'équation 2.11

$$\vec{C}(\vec{r}) = \tilde{m}_0 \vec{\nabla} \left(\nabla_\mu \frac{1}{r} \right). \quad (\text{Eq-2.19})$$

En toute rigueur, \vec{C} est défini comme l'induction magnétique, tandis que le champ magnétique a pour expression $\vec{H} = \frac{m_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\nabla_{\mu} \frac{1}{r} \right)$. Ainsi, nous avons $\vec{C} = \mu_0 \vec{H}$. Remarquons, qu'en dehors des sources, \vec{C} et \vec{H} sont identiques dans le système cgs. Cependant, comme leurs unités diffèrent dans le système international, respectivement A/m et T, leurs normes diffèrent aussi. Dans ce chapitre, par souci de simplicité, nous continuons à confondre ces deux grandeurs. Nous reviendrons sur cette distinction au **chapitre IV**.

Rappelons l'expression de $\vec{C}(\vec{r})$ en cartésiennes pour les simulations numériques qui suivent

$$\vec{C}(x, y, z) = -\tilde{m}_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \left(\frac{lx + my + nz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

Le calcul des dérivations donne

$$\vec{C}(x, y, z) = -\frac{\tilde{m}_0}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \begin{pmatrix} l(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x(lx + my + nz)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ m(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3y(lx + my + nz)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ n(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3z(lx + my + nz)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Cette expression se simplifie ainsi

$$\vec{C}(x, y, z) = -\frac{\tilde{m}_0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \begin{pmatrix} l(-2x^2 + y^2 + z^2) - 3mxy - 3nxz \\ m(x^2 - 2y^2 + z^2) - 3lyx - 3nyz \\ n(x^2 + y^2 - 2z^2) - 3lzx - 3mzy \end{pmatrix},$$

que l'on note pour alléger l'écriture

$$\vec{C}(\vec{r}) = -\frac{\tilde{m}_0}{r^5} \begin{pmatrix} lr^2 - 3x\lambda \\ mr^2 - 3y\lambda \\ nr^2 - 3z\lambda \end{pmatrix}. \quad (\text{Eq-2.20})$$

Classiquement, on a recourt à une forme plus condensée et intrinsèque

$$\vec{C}(\vec{r}) = -\frac{\tilde{m}_0}{r^5} (\vec{\mu} r^2 - 3(\vec{\mu} \cdot \vec{r}) \vec{r}).$$

Les lignes de champ sont représentées sur la **figure 2.7**.

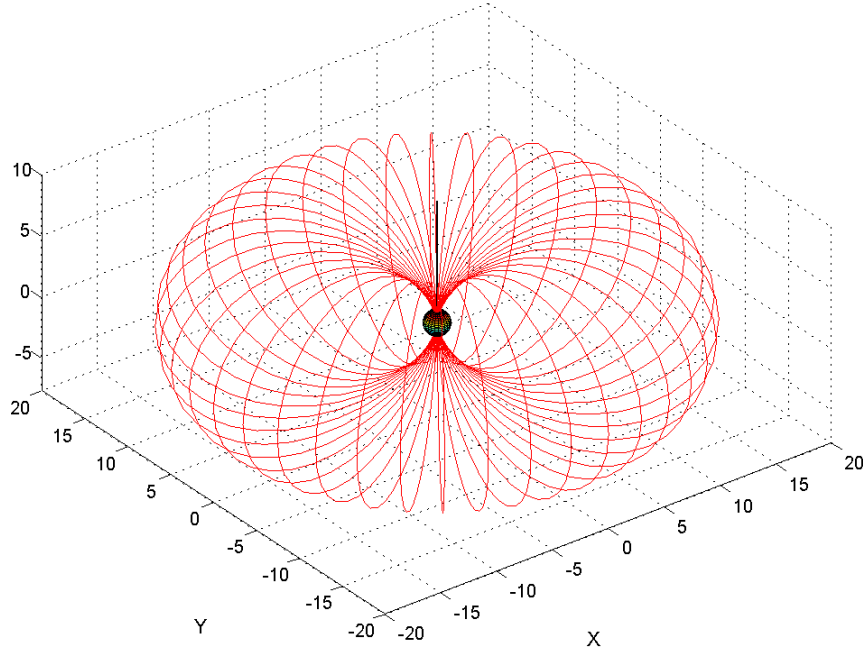


Figure 2.7 : Représentation dans l'espace des lignes de champ d'un dipôle magnétique.

Si le dipôle est repéré par $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, il suffit de convoluer le champ à l'origine par une distribution de Dirac

$$\vec{C}(\vec{r}) = -\tilde{m}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) * \vec{\nabla} \left(\nabla_\mu \frac{1}{r} \right). \quad (\text{Eq-2.21})$$

On obtient l'expression plus générale du champ magnétique dipolaire

$$\vec{C}(\vec{r}) = -\frac{\tilde{m}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^5} \begin{pmatrix} l\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^2 - 3(x - x_0)\lambda_0 \\ m\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^2 - 3(y - y_0)\lambda_0 \\ n\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^2 - 3(z - z_0)\lambda_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{Eq-2.22})$$

Calculons la norme de $\vec{C}(r)$

$$C(\vec{r}) = \frac{\tilde{m}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^5} \sqrt{\left(l\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^2 - 3(x - x_0)\lambda_0 \right)^2 + \left(m\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^2 - 3(y - y_0)\lambda_0 \right)^2 + \left(n\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^2 - 3(z - z_0)\lambda_0 \right)^2},$$

c'est-à-dire

$$C(\vec{r}) = \frac{\tilde{m}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^5} \left[(l^2 + m^2 + n^2) \|\vec{r} - \vec{r}_0\|^4 + 9\lambda_0^2 ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2) - 6\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^2 \lambda_0 (l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0)) \right]^{1/2}.$$

ou finalement

$$C(\vec{r}) = \frac{\tilde{m}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^4} \sqrt{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^2 + 3\lambda_0^2} . \quad (\text{Eq-2.23})$$

Ce résultat sera utile au **paragraphe 2.2.3**.

Nous représentons l'allure de chacune des trois composantes pour quelques combinaisons d'angles sur la **figure 2.8**.

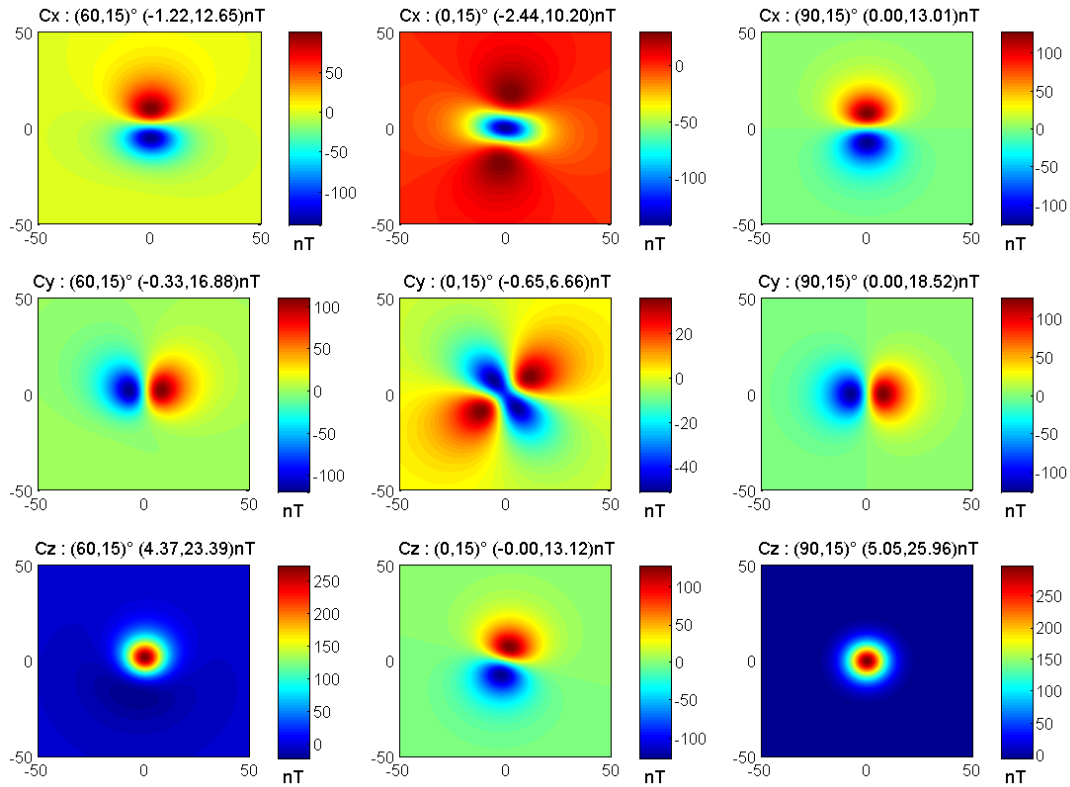


Figure 2.8 : Composantes du champ d'anomalie dipolaire pour différentes inclinaisons et déclinaisons.

D'après la **figure 2.8** et d'autres simulations non représentées ici, nous constatons que :

- i. pour les faibles inclinaisons ($I < 30^\circ$), le signal est porté principalement par la composante C_x pour les faibles déclinaisons ($D \leq 30^\circ$) et par la composante C_y ($D \geq 60^\circ$) pour les fortes déclinaisons ;
- ii. pour les fortes inclinaisons ($I > 60^\circ$), le signal est porté principalement par la composante C_z quelque soit la déclinaison.

2.2 ANOMALIES DIPOLAIRES

Supposons que le dipôle magnétique soit plongé dans un champ magnétique extérieur, celui de la Terre en l'occurrence. Au voisinage du point P, il crée donc une anomalie de champ magnétique. Le champ total en P est alors la superposition de la contribution dipolaire et de la contribution du champ de référence terrestre (Blakely, 1995)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{C}(\vec{r}) + \vec{R}(\vec{r}).$$

D'après l'équation 2.19, on obtient

$$\vec{B}(\vec{r}) = \tilde{m}_0 \vec{\nabla} \left(\nabla_{\mu} \frac{1}{r} \right) + \vec{R}(\vec{r}). \quad (\text{Eq-2.24})$$

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'impossibilité de mesurer sur le terrain le champ d'anomalie nous contraint à calculer l'anomalie de l'intensité du champ magnétique (AICM). Il faut préciser que dans notre cas, nous connaissons parfaitement le champ d'anomalie $\vec{C}(\vec{r})$ puisque nous savons que la source étudiée est dipolaire. Par conséquent, il est possible d'explicitier analytiquement les différents ordres de F . Nous calculerons dans les paragraphes qui suivent l'ordre 1 (AICM1) et l'ordre 2 (AICM2) de l'anomalie dipolaire.

2.2.1 Anomalie de l'Intensité du Champ Magnétique : AICM

D'après la définition 1.4 de l'AICM, nous pouvons calculer la valeur exacte de l'anomalie du champ total créée par un dipôle

$$F = \left\| \begin{pmatrix} R_x - \frac{\tilde{m}_0}{r^5} (lr^2 - 3x\lambda) \\ R_y - \frac{\tilde{m}_0}{r^5} (mr^2 - 3y\lambda) \\ R_z - \frac{\tilde{m}_0}{r^5} (nr^2 - 3z\lambda) \end{pmatrix} \right\| - \left\| \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} \right\|. \quad (\text{Eq-2.25})$$

Le calcul de la norme donne

$$F = \sqrt{\left(R_x - \frac{\tilde{m}_0}{r^5} (lr^2 - 3x\lambda) \right)^2 + \left(R_y - \frac{\tilde{m}_0}{r^5} (mr^2 - 3y\lambda) \right)^2 + \left(R_z - \frac{\tilde{m}_0}{r^5} (nr^2 - 3z\lambda) \right)^2} - R. \quad (\text{Eq-2.26})$$

Il est intéressant d'étudier les variations relatives de F pour un dipôle induit par le champ terrestre en fonction de l'inclinaison et de la déclinaison. L'amplitude maximale est associée à 100 %. Les

résultats sont montrés à la **figure 2.9** représentant l'amplitude de la fonction en pourcentage, à *gauche*, pour une déclinaison fixée et une inclinaison variable, à *droite*, lorsque les deux angles varient.

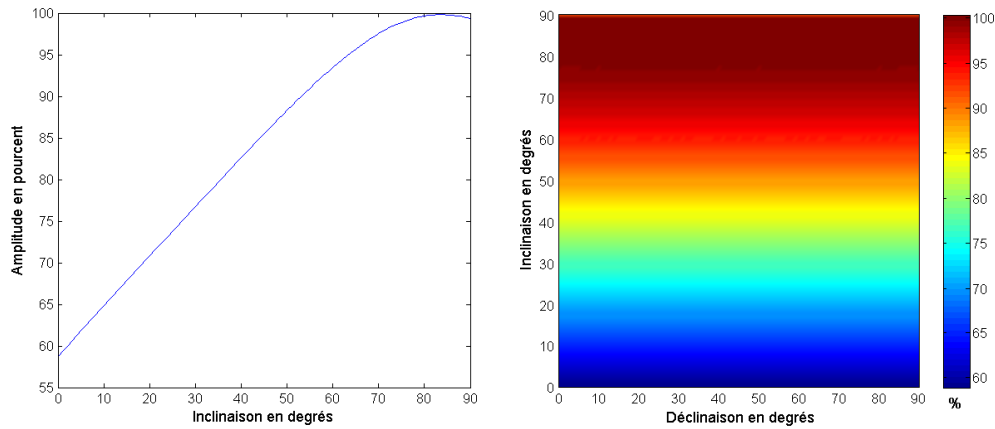


Figure 2.9 : Amplitude maximale de l'AICM pour I variable et $D = 15^\circ$ (à *gauche*) et pour I et D variables (à *droite*).

Il apparaît sur la figure précédente que l'amplitude ne dépend presque pas de la déclinaison. La valeur minimale de l'amplitude est obtenue à l'équateur ($I = 0^\circ$) et elle est maximale au pôle ($I = 90^\circ$), cette propriété est mise à profit dans la transformation de *réduction au pôle* décrite au **chapitre VI**.

A la **figure 2.10**, nous traçons l'allure de l'AICM pour les trois dipôles décrits au début du chapitre.

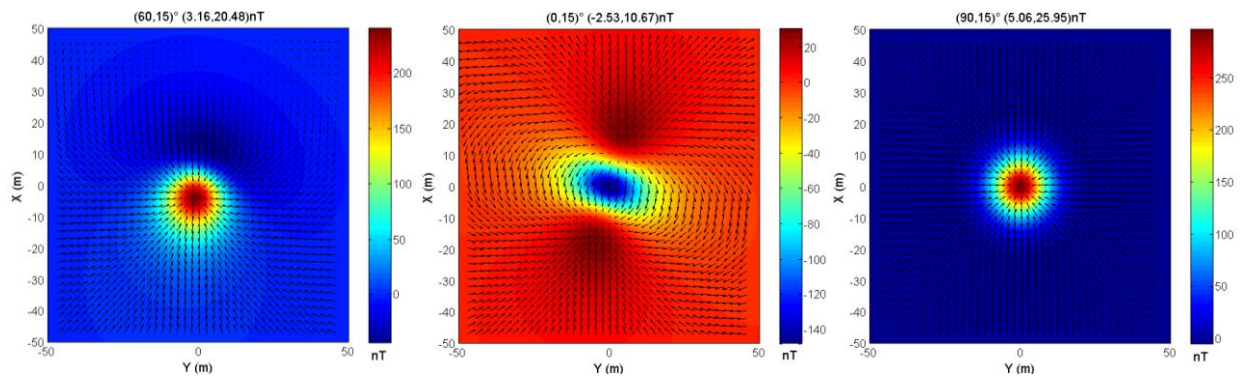


Figure 2.10 : AICM pour différentes valeurs de I et D .
Les flèches noires montrent les composantes horizontales normées du champ d'anomalie.

Il faut tout de suite rassurer le lecteur qui serait surpris de ne pas trouver une moyenne nulle pour chaque anomalie (premier nombre du deuxième groupe de parenthèses). Cela tient au fait que l'on a volontairement tronqué le calcul de l'anomalie sur un carré de 100 unités de côté ; en théorie on

obtiendrait une moyenne strictement nulle sur un domaine de taille infinie quelque soit l'inclinaison et la déclinaison.

Par ailleurs, il est intéressant de constater que l'écart type croît avec l'inclinaison. Cela s'explique par le fait qu'à l'équateur l'anomalie est relativement étalée et son minimum est évasé à la verticale de la source. Tandis qu'au pôle, l'anomalie est plus resserrée autour de l'objet et son maximum est centré à l'aplomb du dipôle.

Remarquons aussi que l'effet de la déclinaison est d'autant plus important sur la forme de l'anomalie que l'inclinaison est faible. Au pôle, l'anomalie dessine des anneaux concentriques centrés sur l'origine quelque soit la déclinaison tandis qu'à l'équateur une augmentation de déclinaison conduit à une rotation dans le sens horaire de l'axe de l'anomalie : le dipôle rayonne dans la direction Nord-Sud pour $D = 0^\circ$ et dans la direction Est-Ouest pour $D = 90^\circ$.

Pour mieux visualiser l'AICM, nous représentons la fonction dans l'espace entier. La **figure 2.11** est obtenue en explorant les différentes valeurs d'inclinaison et de déclinaison, nous conservons les notations propres au repère géographique local.

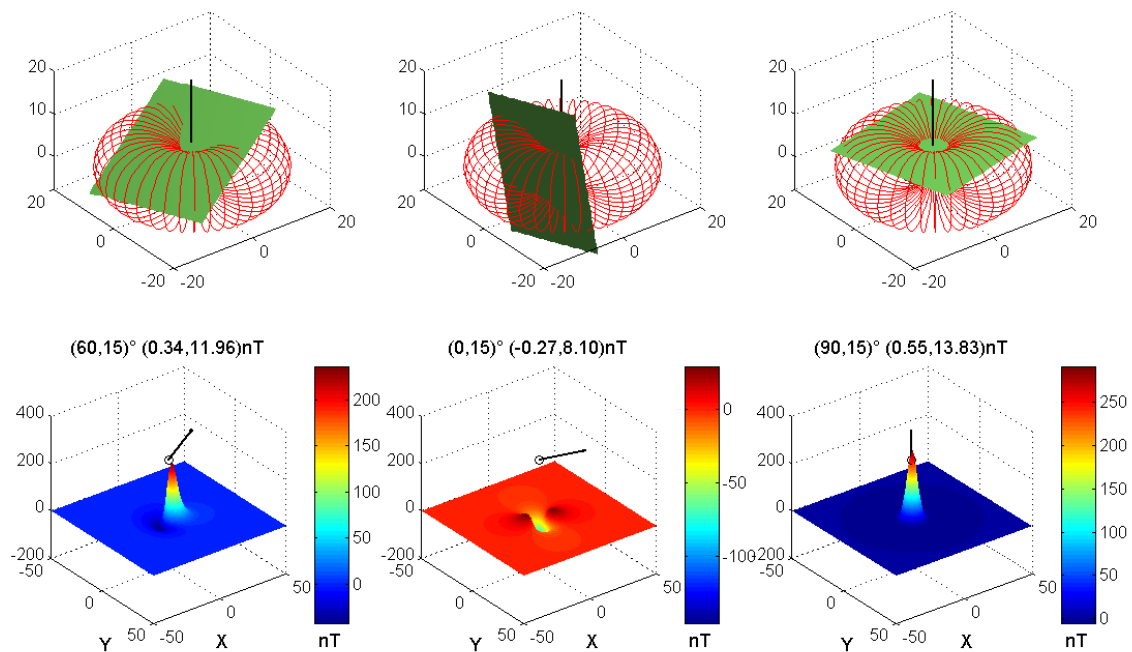


Figure 2.11 : Représentation en trois dimensions de l'AICM pour différentes valeurs de I et D ainsi que les plans de mesure correspondants.

Sur ces représentations, nous avons superposé la carte d'anomalie et le moment magnétique associé, en noir. Par ailleurs, les plans de mesure, chevauchant les lignes de champ, sont dessinés en vert sur une figure séparée. Pour des questions de représentation, nous avons préféré faire

tourner le plan de mesure en fonction des angles d'inclinaison et de déclinaison plutôt que les lignes de champ.

2.2.2 Calcul de l'anomalie de l'intensité du champ magnétique à l'ordre 1

L'anomalie de projection est définie comme le premier terme du développement limité de l'anomalie F , nous l'avons obtenu à l'équation **1.11** $F_1 = \vec{\rho} \cdot \vec{C}$. Or d'après l'égalité **2.19**, il vient

$$F_1(\vec{r}) = \tilde{m}_0 \vec{\rho} \cdot \vec{\nabla} \left(\nabla_\mu \frac{1}{r} \right). \quad (\text{Eq-2.27})$$

De même que dans l'équation **2.10**, on définit alors l'opérateur de dérivation oblique, dans la direction du champ de référence par

$$\nabla_\rho = \vec{\rho} \cdot \vec{\nabla} \quad (\text{Eq-2.28})$$

et ainsi

$$F_1(\vec{r}) = \tilde{m}_0 \nabla_\rho \nabla_\mu \frac{1}{r}. \quad (\text{Eq-2.29})$$

Cette expression importante entraîne plusieurs commentaires :

- i. D'après l'équation **2.11** et l'équation **2.29**, F_1 et U peuvent être reliés de façon immédiate

$$F_1 = -\nabla_\rho U. \quad (\text{Eq-2.30})$$

Une autre façon plus élégante pour démontrer ce résultat dans le cas général consiste à partir de la définition **1.11**. Il suffit d'y remplacer l'égalité **2.8** puis d'utiliser la notation **2.28**. En vertu de ce résultat déjà mentionné par Henderson (1948) et Baranov (1957), on peut déduire que pour obtenir le potentiel d'anomalie, il faut intégrer l'AICM1 dans la direction opposée au vecteur champ de référence. Nous obtenons alors le potentiel U ne dépendant plus du champ magnétique extérieur mais bien de l'aimantation. L'application pratique de cette relation trouvera toute sa pertinence dans le domaine spectral abordé au chapitre suivant.

- ii. Il est intéressant de noter que la double dépendance directionnelle de F_1 exprimée dans l'équation **2.29** par les deux dérivations obliques était déjà décelable dans l'égalité **1.11**. La

direction d'aimantation est exprimée dans le vecteur champ d'anomalie tandis que la direction de champ de référence est signifiée par la projection selon le vecteur $\vec{\rho}$. Au final, F_1 dépend des quatre angles I, D, i et d .

iii. En explicitant l'équation **2.29** avec l'opérateur de dérivation noté ici « \circ », il vient

$$F_1(x, y, z) = \tilde{m}_0 \left(L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} + N \frac{\partial}{\partial z} \right) \circ \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \circ \frac{1}{r}. \quad (\text{Eq-2.31})$$

Il est important de noter que F_1 est homogène à un potentiel newtonien de type quadrupolaire. En effet, cette fonction est analogue à un potentiel créé par un quadripôle caractérisé par une première direction $\vec{\rho}$ et par une seconde direction $\vec{\mu}$.

L'équation **2.31** est encore plus explicite en calculant les deux séries de dérivations. La première série donne

$$F_1(x, y, z) = -\tilde{m}_0 \left(L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} + N \frac{\partial}{\partial z} \right) \circ \left(\frac{lx + my + nz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right). \quad (\text{Eq-2.32})$$

Puis en effectuant la deuxième série de dérivations, on obtient

$$F_1 = -\frac{\tilde{m}_0}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \left((x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} (lL + mM + nN) - 3(Lx + My + Nz)(lx + my + nz)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \right),$$

que l'on peut simplifier par

$$F_1(x, y, z) = -\frac{\tilde{m}_0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \left((x^2 + y^2 + z^2)(lL + mM + nN) - 3(Lx + My + Nz)(lx + my + nz) \right).$$

Ce qui donne en posant $\Lambda = Lx + My + Nz = \vec{r} \cdot \vec{\rho}$,

(Eq-2.33)

$$F_1(\vec{r}) = -\frac{\tilde{m}_0}{r^5} \left(r^2 (lL + mM + nN) - 3\Lambda \lambda \right).$$

(Eq-2.34)

Ce résultat aurait pu être obtenu plus simplement en calculant directement le produit scalaire de l'équation **1.11** entre le vecteur champ dipolaire et le vecteur unitaire portant le champ de référence.

La double dépendance directionnelle de F_1 en champ et aimantation nous conduit à explorer le cas particulier plus simple d'un dipôle induit par le champ magnétique extérieur. Cette propriété de la matière est une illustration du paramagnétisme décrit au chapitre précédent.

Le moment dipolaire induit est donc parallèle au champ de référence $\vec{\rho} = \vec{\mu}$, c'est-à-dire $L = l$, $M = m$ et $N = n$. L'anomalie magnétique s'écrit alors

$$F_1(\vec{r}) = \frac{\tilde{m}_0}{r^5} (3\lambda^2 - r^2) . \quad (\text{Eq-2.35})$$

Si le dipôle est repéré par $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, il suffit de convoluer l'anomalie à l'origine par un Dirac

$$F_1(\vec{r}) = \tilde{m}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) * \left(\nabla_\rho \nabla_\mu \frac{1}{r} \right) . \quad (\text{Eq-2.36})$$

Cette expression, utile pour la suite, se met aussi sous la même forme que l'équation 2.34

$$F_1(\vec{r}) = -\frac{\tilde{m}_0}{r_0^5} \left(\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^2 (lL + mM + nN) - 3\Lambda_0 \lambda_0 \right),$$

avec $\Lambda_0 = L(x - x_0) + M(y - y_0) + N(z - z_0) = \vec{\rho} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$.

2.2.3 Calcul de l'anomalie de l'intensité du champ magnétique à l'ordre 2

Nous avons défini la fonction AICM2 au **paragraphe 1.2.5**. Bien que cette fonction n'ait pas d'application concrète dans les méthodes magnétiques actuelles, elle pourrait se révéler pertinente quand la mesure exacte du vecteur champ magnétique deviendra possible en acquisition continue. En attendant, il peut être intéressant d'examiner son expression de plus près. D'après l'équation 1.17, il vient

$$F_2 = C \cos \alpha + \frac{C^2}{2R} (1 - \cos^2 \alpha), \quad (\text{Eq-2.37})$$

c'est-à-dire

$$F_2 = \vec{\rho} \cdot \vec{C} + \frac{1}{2R} (\vec{C})^2 - \frac{1}{2R} (\vec{\rho} \cdot \vec{C})^2 . \quad (\text{Eq-2.38})$$

On peut calculer F_2 en remplaçant \vec{C} par son expression donnée par l'équation 2.20. Le calcul est analogue au calcul précédent mais plus fastidieux. Il est plus judicieux d'utiliser l'expression issue

du développement limité donnée dans l'équation **1.18** $F_2 = F_1 + \frac{1}{2R}(C^2 - F_1^2)$, car elle permet de réutiliser les résultats des égalités **2.34** et **2.23**, on obtient après calculs

$$F_2 = \frac{\tilde{m}_0}{r^5} (3\Lambda\lambda - (lL + mM + nN)r^2) + \frac{1}{2R} \left(\frac{\tilde{m}_0^2}{r^8} (r^2 + 3\lambda^2) - \frac{\tilde{m}_0^2}{r^{10}} (3\Lambda\lambda - (lL + mM + nN)r^2)^2 \right),$$

et en développant le carré

$$F_2 = \frac{\tilde{m}_0}{r^5} \left(3\Lambda\lambda - (lL + mM + nN)r^2 + \frac{1}{2R} \frac{\tilde{m}_0}{r^3} \left(r^2 + 3\lambda^2 - \frac{9\lambda^2\Lambda^2}{r^2} - (lL + mM + nN)r^2 + 6(lL + mM + nN)\lambda\Lambda \right) \right). \quad (\text{Eq-2.39})$$

Dans le cas simple d'un dipôle induit par le champ magnétique extérieur, le moment dipolaire induit est parallèle au champ de référence $\vec{\rho} = \vec{\mu}$. L'AICM2 pour un dipôle induit s'exprime finalement

$$F_2(\vec{r}) = \frac{\tilde{m}_0}{r^5} \left(3\lambda^2 - r^2 + \frac{9\lambda^2}{2R} \frac{\tilde{m}_0}{r^5} (r^2 - \lambda^2) \right). \quad (\text{Eq-2.40})$$

2.2.4 Comparaison entre l'AICM et l'AICM1

L'étude graphique menée au **paragraphe 2.2.1** pourrait être effectuée pour l'anomalie de projection. Cela donnerait des résultats graphiques en apparence très semblables, justifiant a priori l'approximation de l'équation **1.9**. Cette forte similitude entre les deux fonctions anomalies nous conduit à affiner cette comparaison par une approche plus quantitative.

On reprend les expressions de l'AICM et de l'AICM1 établies aux paragraphes précédents. Pour chacune des trois combinaisons angulaires, on soustrait l'AICM1 à l'AICM créée par le dipôle correspondant. Ces différences sont tracées à la **figure 2.12**. Cette première approche semi-quantitative permet déjà d'établir une comparaison entre les deux types d'anomalie.

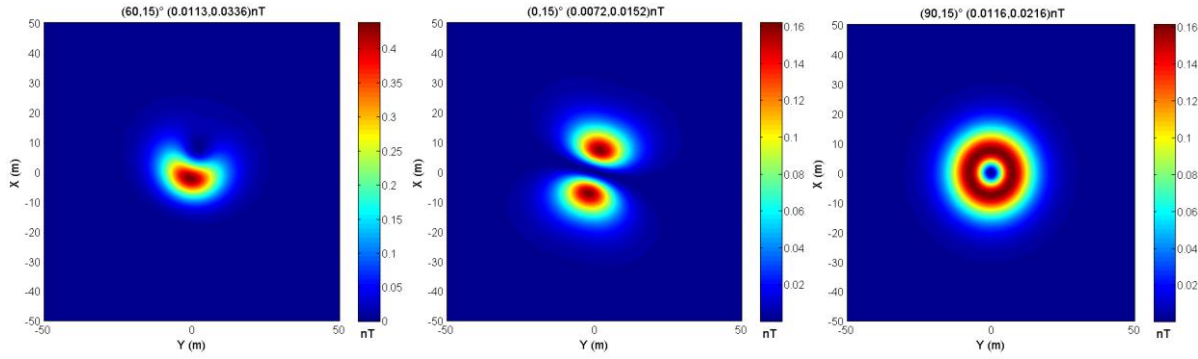


Figure 2.12 : Représentation des différences entre l'AICM et l'AICM1 pour différentes valeurs de I et D .

L'étude graphique de la différence $F - F_1$ permet de confirmer le résultat général de l'équation 1.21. En effet, toutes les moyennes calculées sont bien positives. Il faut aussi noter que ces différences sont très faibles et sont dans le rapport 10^{-3} avec l'anomalie.

Pour affiner cette comparaison, nous effectuons une autre simulation numérique comportant une double boucle sur l'intensité de l'anomalie et sur l'un des deux angles variant de 0 à 90°. Une première simulation est menée à inclinaison variable et à déclinaison fixe ($D = 15^\circ$) puis une seconde à déclinaison variable et à inclinaison fixe ($I = 45^\circ$).

Comme il n'est pas possible de contrôler directement l'amplitude de l'AICM, il est nécessaire de passer par un calcul intermédiaire dans lequel nous l'évaluons à partir de l'intensité du moment magnétique dipolaire. Pour cette simulation représentée à la **figure 2.13**, l'intensité de l'anomalie dipolaire varie de 0 à 9000 nT pour atteindre l'ordre de grandeur maximum des anomalies courantes.

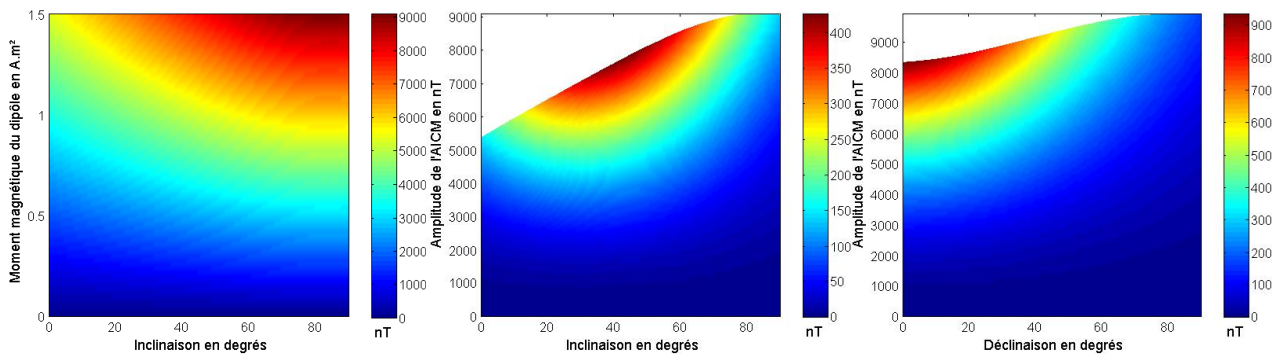


Figure 2.13 : Représentations de l'amplitude de l'AICM pour des moments magnétiques et inclinaisons variables (à gauche) ainsi que les différences maximales entre l'AICM et l'AICM1, pour des inclinaisons et intensités variables (au milieu) et pour des déclinaisons et intensités variables (à droite).

Sur le premier graphe de gauche de la **figure 2.13**, nous faisons varier le moment du dipôle de 0 à 1.5 A.m² (avec un pas de 0,02) et calculons l'amplitude de l'anomalie pour chaque valeur d'inclinaison allant de 0 à 90° (avec un pas de 1).

Sur le graphe du *milieu*, nous en déduisons le maximum des différences entre les deux anomalies en fonction de l'inclinaison et de l'amplitude de l'AICM, elle se situe pour une inclinaison de 45° . Ce maximum peut atteindre environ 400 nT pour une anomalie mesurée de 7500 nT d'amplitude, soit une erreur de 5 %. En moyenne, ces différences avoisinent 140 nT pour cette gamme d'anomalie, soit une erreur de 2 %.

Sur le graphe de *droite*, nous calculons de la même façon le maximum des différences entre les deux anomalies en fonction de la déclinaison et de l'amplitude de l'AICM, l'écart entre l'AICM et l'AICM1 se creuse un peu plus pour atteindre presque 10 %.

Il est intéressant de vérifier que dans ces simulations nous retrouvons aussi une différence positive entre l'AICM et l'AICM1 quelque soient les valeurs d'inclinaison et de déclinaison. Nous appliquerons au **paragraphe 3.2.6.2.1.2** du chapitre suivant la relation **1.20** dans le domaine de Fourier afin de diminuer l'écart entre l'anomalie mesurée et l'anomalie de projection.

Par ailleurs, on peut noter que l'expression mathématique de l'AICM confirme l'évolution non linéaire de l'erreur constatée sur les graphes précédents. En effet, il apparaît clairement que les variations de l'AICM ne sont pas proportionnelles à ces trois paramètres.

2.3 SUPERPOTENTIELS DIPOLAIRES

2.3.1 Superpotentiel vecteur magnétique

Continuons notre exploration des fonctions caractéristiques en magnétostatique. Il est parfois pertinent, en régime permanent, d'utiliser des fonctions auxiliaires, autres que les simples potentiels scalaire ou vecteur, pour étudier une source magnétique. Les plus importantes de ces fonctions sont les potentiels de polarisation magnétique, encore appelées « *vecteurs de Hertz* » ou « *superpotentiels vecteurs* », introduits par Hertz (1889) et Righi (1901). Comme leur nom le suggère, ces superpotentiels mettent en avant les densités de polarisation magnétique ou aimantation (Durand, E., 1968 ; Jackson, J. D., 2001 ; Roy, 2008).

Nous avons vu dans l'équation **2.4** que si \vec{A} vérifie la jauge de Coulomb, ce vecteur est un champ à flux conservatif. Nous allons montrer qu'il peut lui-même dériver d'un autre potentiel vecteur. Reprenons d'abord l'équation **2.6**

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \times \vec{m}_0.$$

Or
$$\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \times \vec{m}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{m}_0}{r} \right) - \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{\nabla} \times \vec{m}_0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \vec{m}_0 = \vec{0},$$

donc
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{m}_0}{r} \right). \quad (\text{Eq-2.41})$$

Il existe donc une fonction superpotentiel vecteur $\vec{\Pi}$ dont dérive le potentiel \vec{A} telle que

$$\boxed{\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}.} \quad (\text{Eq-2.42})$$

Ce superpotentiel vecteur a pour expression générale

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{m}_0}{r} \right) + \vec{\nabla} f(\vec{r}), \quad (\text{Eq-2.43})$$

avec $f(r)$ un champ scalaire arbitraire. On le choisit uniforme, ce qui donne une expression plus simple

$$\boxed{\vec{\Pi}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}_0}{r}.} \quad (\text{Eq-2.44})$$

Si le dipôle est centré sur l'origine, le superpotentiel magnétique vecteur d'un dipôle magnétique a pour expression en P, en fonction des cosinus directeurs de $\vec{\mu}$ exprimée dans l'équation 2.1

$$\vec{\Pi}(x, y, z) = \frac{\vec{m}_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \quad (\text{Eq-2.45})$$

que l'on peut condenser en

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = \frac{\vec{m}_0}{r} \vec{\mu}. \quad (\text{Eq-2.46})$$

On remarque que cette expression est très simple pour un dipôle magnétique. Nous donnerons sa formulation pour une source quelconque au **chapitre IV**.

Si le dipôle est situé en (x_0, y_0, z_0) , le superpotentiel vecteur a pour expression

$$\boxed{\vec{\Pi}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) * \frac{1}{r},} \quad (\text{Eq-2.47})$$

que l'on peut aussi écrire

$$\vec{\Pi}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \vec{m}_0}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}_0\|}. \quad (\text{Eq-2.48})$$

2.3.2 Superpotentiel scalaire magnétique

Nous avons vu que l'anomalie de projection est définie comme la projection du champ magnétique sur la direction du champ de référence. Nous définissons de façon analogue et originale Φ le « *superpotentiel de projection* » ou « *superpotentiel scalaire* » de l'anomalie magnétique comme la projection de $\vec{\Pi}$ sur la direction du moment magnétique de la source

$$\Phi = \vec{\Pi} \cdot \vec{\mu}. \quad (\text{Eq-2.49})$$

Dans le cas particulier d'un dipôle centré sur l'origine, d'après l'équation 2.46, ce superpotentiel scalaire a pour expression

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\tilde{m}_0}{r}. \quad (\text{Eq-2.50})$$

On obtient une expression scalaire très simple en $1/r$ qui ne dépend plus des directions d'aimantation ou de champ extérieur. La carte du superpotentiel scalaire peut rendre l'interprétation plus aisée. En effet, la fonction Φ ne dépend que de la position de la source, sa géométrie et son intensité d'aimantation et non plus de ses caractéristiques directionnelles. La fonction tend vers un maximum à mesure que l'on se rapproche de l'objet sur un plan hors des sources et présente des propriétés de symétrie intéressantes comme l'illustre la **figure 2.14**.

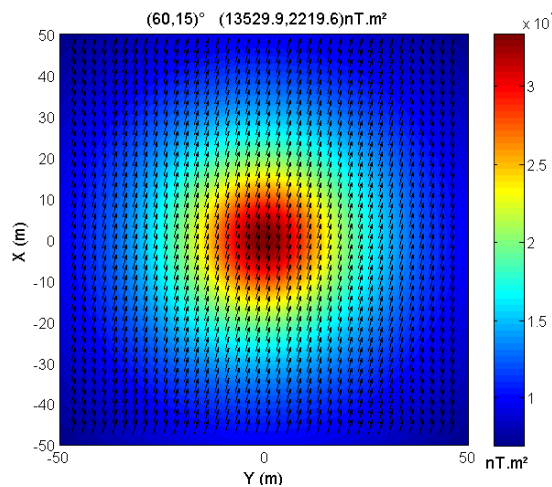


Figure 2.14 : Illustration des superpotentiels : le fond coloré indique les variations de la fonction scalaire et les flèches représentent la composante horizontale normée de la fonction vectorielle.

La fonction scalaire est bien positive sur tout le domaine. Rappelons, que les deux fonctions sont représentées toujours pour le même dipôle (décrit au début du chapitre) et que seule la fonction vectorielle dépend de ses caractéristiques angulaires.

Si le dipôle est repéré par $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, le superpotentiel a pour expression

$$\Phi(\vec{r}) = \tilde{m}_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) * \frac{1}{r}. \quad (\text{Eq-2.51})$$

ce qui donne l'expression tout aussi simple

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\tilde{m}_0}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|}. \quad (\text{Eq-2.52})$$

Nous verrons aux chapitres subséquents que les liens mathématiques entre le superpotentiel magnétique et le potentiel gravimétrique sont analogues à ceux qui existent entre le potentiel magnétique et l'anomalie gravimétrique exposés à la relation de Poisson 2.13. Ces liens sont illustrés sur la **figure 2.15** et seront détaillés à la **figure 4.14**. En *bas* de la **figure 2.15**, nous indiquons, par ailleurs les dépendances de chacune des fonctions en direction, sens et module. Bien entendu, toutes ces fonctions dépendent aussi de la distance à la source.

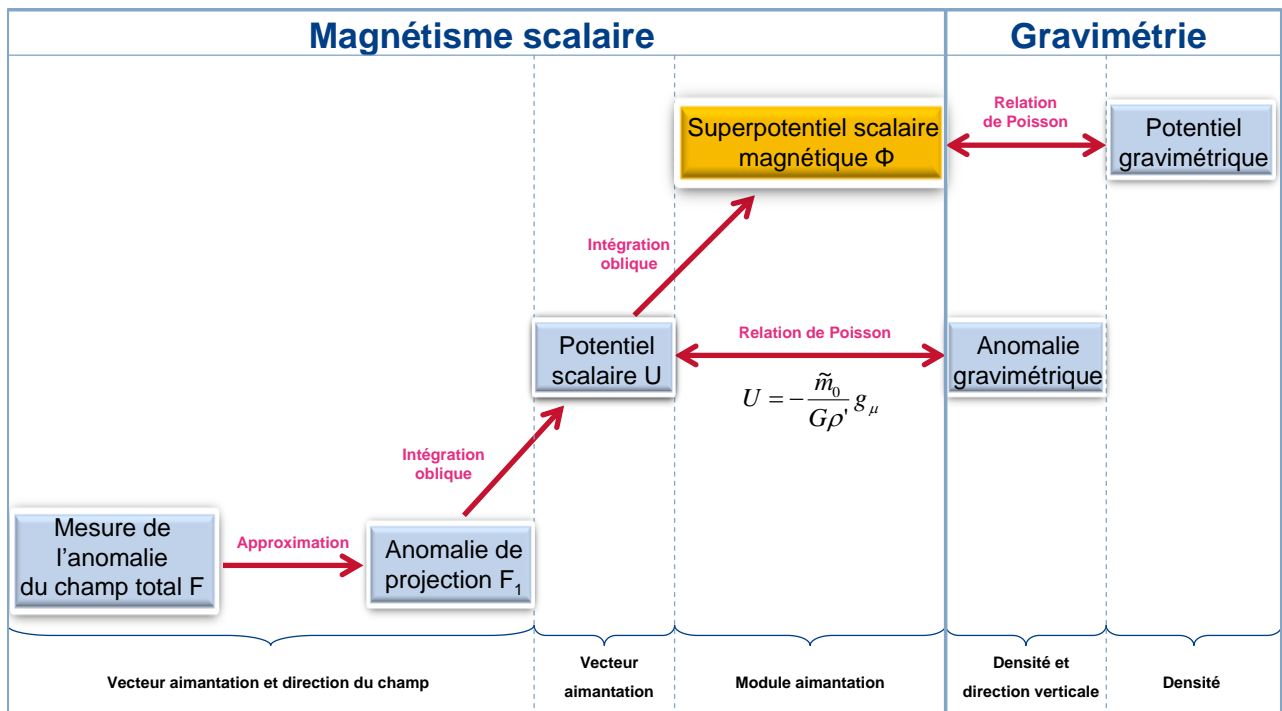


Figure 2.15 : Vue générale des fonctions scalaires magnétiques et de leurs correspondances en gravimétrie.

2.4 RELATIONS DE PASSAGE ENTRE LES FONCTIONS MAGNÉTIQUES

Dans cette section, nous recherchons toutes les relations entre les différentes fonctions magnétiques établies précédemment. Tous les calculs sont menés hors des sources.

2.4.1 Superpotentiel vecteur et potentiels

Nous savons de la relation 2.42, que par construction du superpotentiel vecteur, nous pouvons écrire

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}.$$

Il est intéressant de montrer que $\vec{\Pi}$ peut aussi être relié au potentiel scalaire U .

A l'équation 2.3, il est rappelé que $\vec{C} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, donc on peut écrire en utilisant la relation 2.42

$$\vec{C} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Pi}). \quad (\text{Eq-2.53})$$

Et dans les cas où l'équation 2.8 est vérifiée, on la combine avec l'égalité 2.53 et on obtient

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Pi}) = -\vec{\nabla} U. \quad (\text{Eq-2.54})$$

$$\text{Or} \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Pi}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}) - \Delta \vec{\Pi} \quad (\text{Eq-2.55})$$

et $\vec{\Pi}$ est une fonction harmonique hors des sources, elle vérifie donc

$$\Delta \vec{\Pi} = \vec{0}. \quad (\text{Eq-2.56})$$

Cette relation sera illustrée et démontrée par la suite. Finalement, les équations 2.54 et 2.55 impliquent

$$\vec{\nabla} U = -\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}). \quad (\text{Eq-2.57})$$

On en déduit alors la relation entre U et $\vec{\Pi}$

$$U(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}(\vec{r}) + g(\vec{r}), \quad (\text{Eq-2.58})$$

avec $g(\vec{r})$ un champ scalaire arbitraire. On le choisit nul, ce qui donne une expression plus simple (Roy, 2008)

$$\boxed{U = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}} \quad (\text{Eq-2.59})$$

2.4.2 Anomalie de projection et potentiels vecteurs

En substituant la relation 2.3 à l'équation 1.11, on obtient l'expression permettant de passer du potentiel vecteur \vec{A} à l'anomalie de projection

$$\boxed{F_1 = \vec{\rho} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})} \quad (\text{Eq-2.60})$$

En combinant la formule précédente avec l'équation 2.42, on en déduit la relation permettant de déduire l'anomalie de projection directement à partir du superpotentiel vecteur

$$\boxed{F_1 = \vec{\rho} \cdot (\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Pi}))} \quad (\text{Eq-2.61})$$

2.4.3 Superpotentiel scalaire et potentiels

Cherchons à présent à relier cette nouvelle fonction superpotentiel aux fonctions potentiels scalaire et vecteur.

Pour une source dipolaire, calculons la divergence du superpotentiel vecteur

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\tilde{m}_0}{r} \vec{\mu} \right). \quad (\text{Eq-2.62})$$

D'après les formules classiques d'analyse vectorielle

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = \vec{\mu} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\tilde{m}_0}{r} \right) + \frac{\tilde{m}_0}{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mu}, \quad (\text{Eq-2.63})$$

or

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mu} = 0, \quad (\text{Eq-2.64})$$

donc

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = \nabla_{\mu} \left(\frac{\tilde{m}_0}{r} \right) = \nabla_{\mu} \Phi. \quad (\text{Eq-2.65})$$

Ainsi d'après la relation **2.59**, les deux fonctions scalaires potentiel et superpotentiel magnétique sont reliées comme suit

$$\boxed{U = -\nabla_{\mu} \Phi.} \quad (\text{Eq-2.66})$$

Calculons le gradient du superpotentiel scalaire, utilisons l'équation **2.49** et une des relations de l'analyse vectorielle

$$\vec{\nabla} \Phi = \vec{\Pi} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\mu}) + \vec{\mu} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Pi}) + (\vec{\Pi} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\mu} + (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Pi}. \quad (\text{Eq-2.67})$$

Sachant que $\vec{\mu}$ est un vecteur uniforme, il reste

$$\vec{\nabla} \Phi = \vec{\mu} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\Pi}) + (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Pi}. \quad (\text{Eq-2.68})$$

D'après les équations **2.42** et **2.10**, il vient

$$\vec{\nabla} \Phi = \vec{\mu} \times \vec{A} + \nabla_{\mu} \vec{\Pi}. \quad (\text{Eq-2.69})$$

On multiplie vectoriellement à droite par $\vec{\mu}$

$$\vec{\mu} \times \vec{\nabla} \Phi = \vec{\mu} \times \vec{\mu} \times \vec{A} + \nabla_{\mu} (\vec{\mu} \times \vec{\Pi}). \quad (\text{Eq-2.70})$$

D'après l'équation **2.46** $\vec{\mu} \times \vec{\Pi} = \vec{0}$; la formule du double produit vectoriel entraîne

$$\vec{\mu} \times \vec{\nabla} \Phi = \vec{\mu} (\vec{\mu} \cdot \vec{A}) - \vec{A} (\vec{\mu} \cdot \vec{\mu}). \quad (\text{Eq-2.71})$$

D'après l'équation **2.41** $\vec{\mu} \cdot \vec{A} = 0$; il vient alors

$$\boxed{\vec{A} = -\vec{\mu} \times \vec{\nabla} \Phi.} \quad (\text{Eq-2.72})$$

Les résultats **2.66** et **2.72** sont à notre connaissance nouveaux ; ils sont vrais pour une source dipolaire mais généralisables à tout type de source magnétique, comme nous le montrerons au **chapitre IV**.

2.4.4 Anomalie de projection et potentiels scalaires

D'après l'équation **2.30**, F_1 et U sont reliés de la façon suivante $F_1 = -\nabla_{\rho} U$, l'anomalie et le superpotentiel magnétique sont donc reliés comme suit

$$F_1 = \nabla_\rho \nabla_\mu \Phi. \quad (\text{Eq-2.73})$$

Dans le cas du dipôle, cette relation est identique à la relation **2.29**. Elle sera aussi généralisée à tout type de source magnétique au **chapitre IV**.

2.4.5 Vue synoptique des fonctions magnétiques

La **figure 2.16** propose une vue synoptique des six fonctions magnétiques caractéristiques que nous venons d'établir. À *gauche* se situent les trois fonctions scalaires et à *droite* les trois fonctions vectorielles. De bas en haut, l'ordre de dérivation décroît d'une ligne à l'autre. Nous indiquons, de plus, les opérateurs permettant de calculer chaque fonction à partir d'une autre. En *orange* sont indiqués les nouveaux résultats.

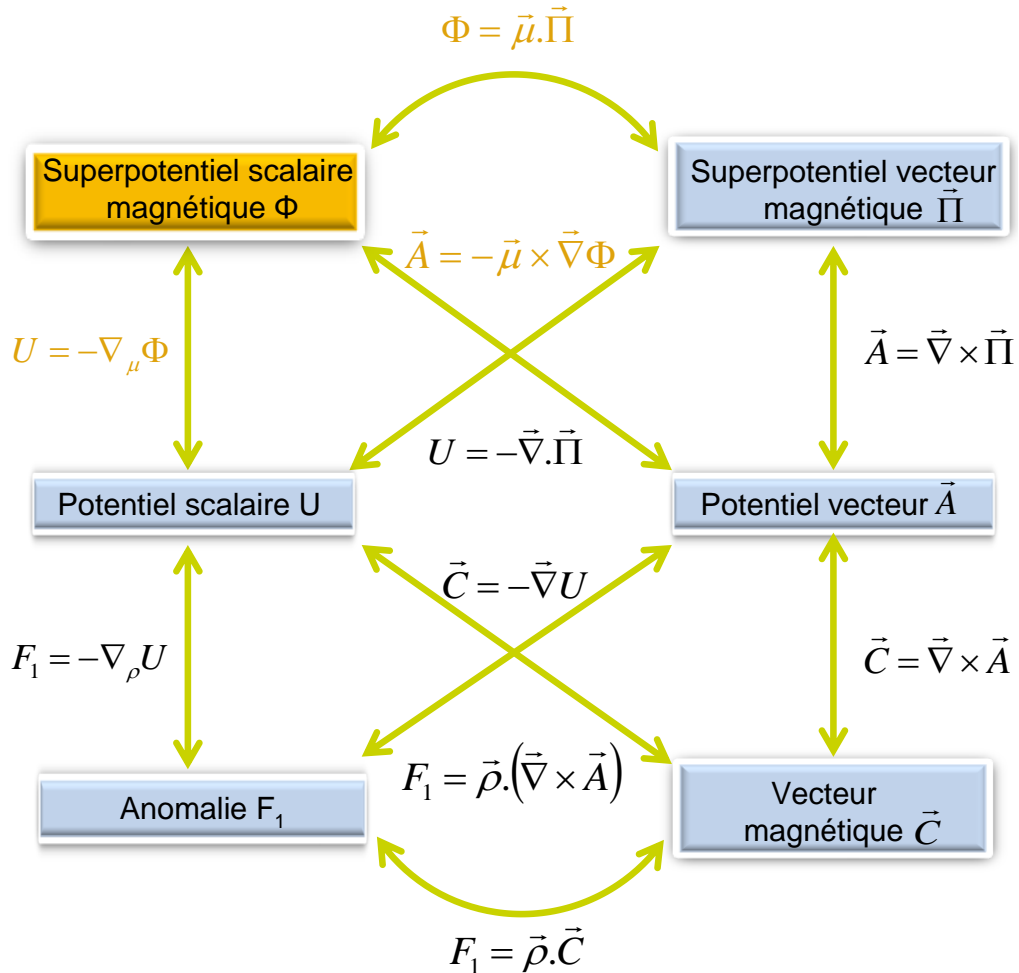


Figure 2.16 : Vue synoptique des six fonctions magnétiques et de leurs relations de passage.

2.5 UTILISATION DES RELATIONS DE PASSAGE

Le formalisme proposé à la **figure 2.16** montre un nouveau champ d'application pour les méthodes magnétiques. En effet, les relations de passage rendent possibles le calcul des trois fonctions vectorielles, qui sont classiquement difficiles voire impossibles à déterminer par la mesure. Nous montrons dans cette section comment à partir de l'anomalie de projection, il est possible en théorie de calculer dans le domaine spatial le superpotentiel scalaire puis les trois fonctions vectorielles.

2.5.1 Calcul des potentiel et superpotentiel scalaires à partir de l'anomalie

En pratique, la mesure sur le terrain donne accès à la grandeur F . Or le calcul de U comme de Φ se fait à partir de F_1 . Cela revient à résoudre deux problèmes de conditions aux limites dans le demi-espace :

- i. Soit le premier problème à résoudre : il faut calculer U et F_1 tels que

$$\Delta U = 0 \text{ et } \nabla_{\rho} U = -F_1(z_0, x, y) \text{ avec } z_0 < 0 \text{ fixé et } \vec{\rho} \text{ connu.}$$

Ce problème peut être rendu itératif et convergent si $F_1 = F_1^{(k)}$ avec $F_1^{(0)} = F$.

- ii. Soit le second problème à résoudre : il faut calculer Φ et $\vec{\mu}$ tels que

$$\Delta \Phi = 0 \text{ et } \nabla_{\mu} \Phi = -U(z_0, x, y) \text{ avec } z_0 < 0 \text{ fixé et } U \text{ connu.}$$

Ce problème peut être rendu itératif et convergent si $\vec{\mu} = \vec{\mu}^{(k)}$ et $\vec{\mu}^{(0)} = \vec{\rho}$.

Ces deux problèmes sont théoriquement solubles mais présentent des difficultés d'implémentation dans le domaine spatial. Nous verrons au chapitre suivant que l'utilisation des transformées de Fourier donnent une solution pratique mais partielle à ces problèmes.

2.5.2 Calcul du superpotentiel vecteur magnétique à partir du superpotentiel scalaire

Dans la suite de notre étude, nous supposons que les aimantations sont induites, il est donc possible de calculer le superpotentiel vecteur magnétique à partir du superpotentiel scalaire. Nous avons démontré à l'égalité **2.49** que $\Phi = \vec{\Pi} \cdot \vec{\mu}$, on en déduit que

$$\vec{\Pi} = \Phi \vec{\mu}. \quad (\text{Eq-2.74})$$

Cette relation permet de retrouver immédiatement l'équation **2.46**.

2.5.3 Calcul du potentiel vecteur magnétique à partir du superpotentiel vecteur

D'après l'équation 2.42 $\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}$, c'est-à-dire $\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \Pi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_x}{\partial y} \end{pmatrix}$.

D'après le résultat 2.45, on retrouve aisément l'expression 2.7 du potentiel vecteur magnétique.

2.5.4 Calcul du champ d'anomalie magnétique à partir du potentiel vecteur

D'après l'équation 2.3 $\vec{C} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$.

Le calcul des dérivées partielles en utilisant le résultat 2.7 permet de retrouver l'expression du champ dipolaire obtenu par l'équation 2.20.

2.5.5 Calcul du champ d'anomalie magnétique à partir du potentiel scalaire

D'après l'équation 2.8, il est facile de passer du potentiel magnétique au champ

$$C_x(x, y, z) = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad C_y(x, y, z) = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{et} \quad C_z(x, y, z) = -\frac{\partial U}{\partial z}. \quad (\text{Eq-2.75})$$

À partir du résultat 2.15, un calcul rapide de ces trois dérivées permet de retrouver les trois composantes de \vec{C} données à l'équation 2.20.

Il est intéressant de noter ici que la composante verticale de \vec{C} est en fait, au signe près, ce que l'on pourrait appeler la « *simple réduction au pôle* » de l'anomalie de projection. Nous expliciterons cet opérateur de transformation de carte au **paragraphe 6.4.2.1**.

2.5.6 Calcul du champ d'anomalie magnétique à partir du superpotentiel scalaire

En combinant les équations 2.8 et 2.66, on obtient

$$\vec{C} = \vec{\nabla} \nabla_{\mu} \Phi. \quad (\text{Eq-2.76})$$

Il est donc possible de passer du superpotentiel au champ

$$\begin{aligned} C_x(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(l \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m \frac{\partial \Phi}{\partial y} + n \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right), \\ C_y(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(l \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m \frac{\partial \Phi}{\partial y} + n \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right), \\ C_z(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(l \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m \frac{\partial \Phi}{\partial y} + n \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (\text{Eq-2.77})$$

Vérifions ces relations par un rapide calcul de dérivées. De l'expression **2.50**, nous avons

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\tilde{m}_0}{r}.$$

La dérivée oblique de Φ selon la direction d'aimantation donne bien l'opposé du potentiel U

$$l \frac{\partial \Phi}{\partial x} + m \frac{\partial \Phi}{\partial y} + n \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\tilde{m}_0 \frac{\lambda}{r^3}. \quad (\text{Eq-2.78})$$

Le calcul des trois dérivées de l'espace de l'équation **2.77** permet de retrouver les trois composantes de \vec{C} .

2.6 TENSEURS MAGNÉTIQUES

Examinons comment à partir du potentiel scalaire le tenseur du gradient magnétique est classiquement défini. Nous nous proposons d'étendre cette logique au superpotentiel scalaire pour établir un nouveau tenseur dérivé : le tenseur de l'anomalie magnétique.

2.6.1 Calcul du tenseur du gradient magnétique à partir du potentiel magnétique

D'après l'équation **2.8** et la définition donnée par Nelson (1988) du *Tenseur du Gradient Magnétique*, rappelée à l'équation **1.39**, le **TGM** peut aussi s'écrire

$$\mathbf{TGM} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{bmatrix}, \quad (\text{Eq-2.79})$$

que l'on notera désormais plus succinctement

$$\mathbf{TGM} = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{yx} & U_{zx} \\ U_{xy} & U_{yy} & U_{zy} \\ U_{xz} & U_{yz} & U_{zz} \end{bmatrix}. \quad (\text{Eq-2.80})$$

Le tenseur étant par construction symétrique, il suffit de calculer six de ses neuf composantes. Les trois composantes diagonales, représentées sur la **figure 2.17**, sont données par

$$\begin{aligned} U_{xx} &= -3\tilde{m}_0 \frac{\lambda + 2lx}{r^5} + 15\tilde{m}_0 \frac{\lambda x^2}{r^7}, \\ U_{yy} &= -3\tilde{m}_0 \frac{\lambda + 2my}{r^5} + 15\tilde{m}_0 \frac{\lambda y^2}{r^7}, \\ U_{zz} &= -3\tilde{m}_0 \frac{\lambda + 2nz}{r^5} + 15\tilde{m}_0 \frac{\lambda z^2}{r^7}. \end{aligned} \quad (\text{Eq-2.81})$$

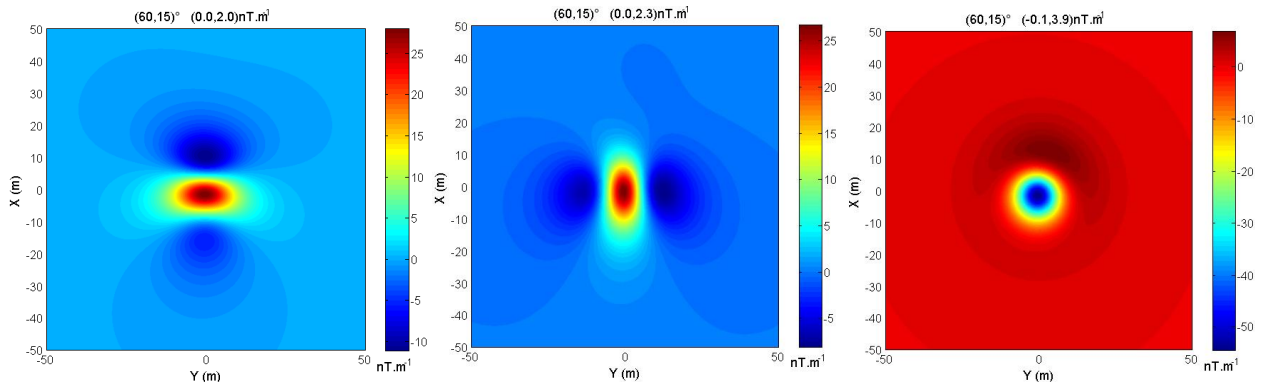


Figure 2.17 : Représentation des trois composantes diagonales du tenseur U_{xx} , U_{yy} et U_{zz} .

Les trois composantes non diagonales, représentées sur la **figure 2.18**, sont données par

$$\begin{aligned} U_{xy} &= -3\tilde{m}_0 \frac{ly + mx}{r^5} + 15\tilde{m}_0 \frac{\lambda xy}{r^7}, \\ U_{xz} &= -3\tilde{m}_0 \frac{lz + nx}{r^5} + 15\tilde{m}_0 \frac{\lambda xz}{r^7}, \end{aligned} \quad (\text{Eq-2.78})$$

$$U_{yz} = -3\tilde{m}_0 \frac{ny + mz}{r^5} + 15\tilde{m}_0 \frac{\lambda yz}{r^7}.$$

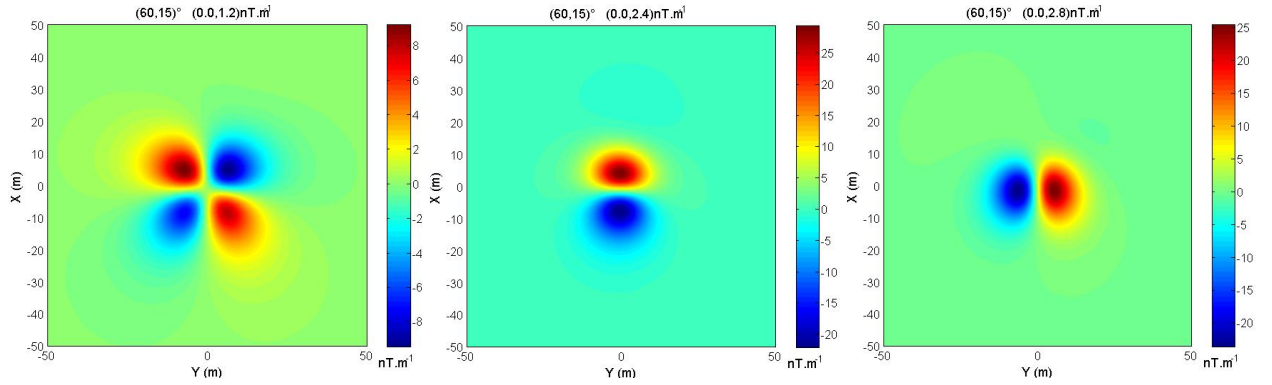


Figure 2.18 : Représentation des trois composantes non diagonales du tenseur U_{xy} , U_{xz} et U_{yz} .

De plus comme la somme de ces trois dérivées partielles de U donne

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = -3\tilde{m}_0 \frac{5lx + 5my + 5nz}{r^5} + 15\tilde{m}_0 \frac{(lx + my + nz)(x^2 + y^2 + z^2)}{r^7},$$

on obtient alors $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$; la trace de **TGM** est donc nulle, conformément à l'équation 2.2 de Maxwell-Thomson . Nous reviendrons sur ce résultat au **paragraphe 2.8.1**.

Finalement, seules cinq des neuf composantes du tenseur **TGM** sont indépendantes.

2.6.2 Calcul du tenseur de l'anomalie magnétique à partir du superpotentiel magnétique

Nous définissons un nouveau tenseur, appelé *Tenseur de l'Anomalie Magnétique* et noté **TAM**. Par analogie avec le **TGM** défini à partir du potentiel, celui-ci est défini à partir du superpotentiel (Munsch & Fleury, 2011)

$$\mathbf{TAM} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{bmatrix}. \quad (\text{Eq-2.82})$$

Ces composantes seront notées selon la même logique que la définition 2.80. Le tenseur étant par construction symétrique, il suffit de calculer six de ses neuf composantes. Pour un dipôle, les trois composantes diagonales, représentées sur la **figure 2.19**, sont données par

$$\Phi_{xx} = \tilde{m}_0 \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{r^5}, \quad \Phi_{yy} = \tilde{m}_0 \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{r^5} \quad \text{et} \quad \Phi_{zz} = \tilde{m}_0 \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^5}. \quad (\text{Eq-2.83})$$

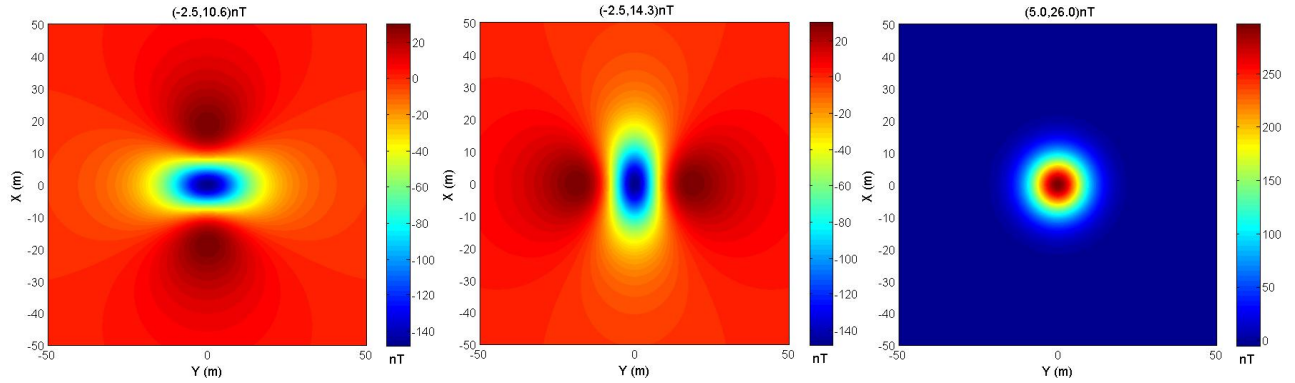


Figure 2.19 : Représentation des trois composantes diagonales du tenseur Φ_{xx} , Φ_{yy} et Φ_{zz} .

Les trois composantes non diagonales, représentées sur la **figure 2.20**, sont données par

$$\Phi_{xy} = \frac{3\tilde{m}_0 xy}{r^5}, \quad \Phi_{xz} = \frac{3\tilde{m}_0 xz}{r^5} \quad \text{et} \quad \Phi_{yz} = \frac{3\tilde{m}_0 yz}{r^5}. \quad (\text{Eq-2.84})$$

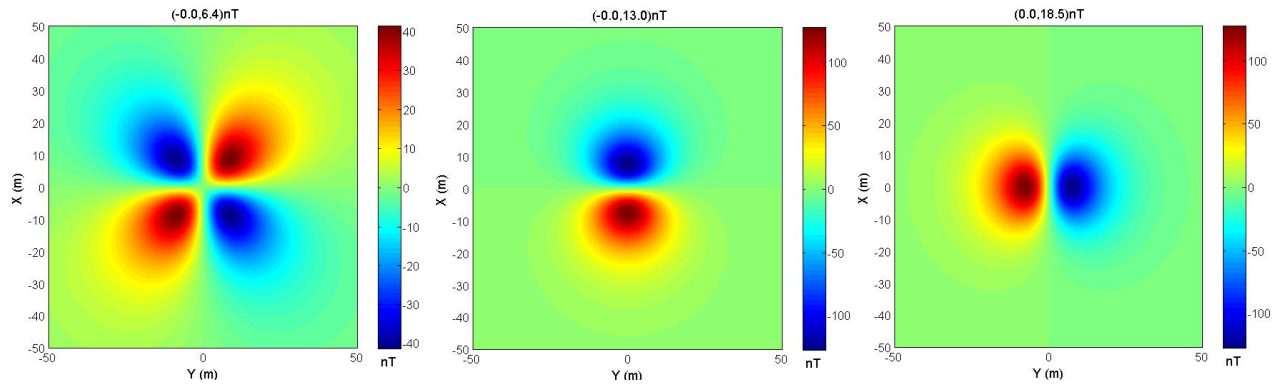


Figure 2.20 : Représentation des trois composantes non diagonales du tenseur Φ_{xy} , Φ_{xz} et Φ_{yz} .

La sommation de ces trois dérivées partielles donne

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = -\frac{3\tilde{m}_0}{r^3} + 3\tilde{m}_0 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5}.$$

On obtient alors $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$, la trace de **TAM** est nulle. Nous reviendrons sur ce résultat au **paragraphe 2.8.2**.

Finalement, seules cinq des neuf composantes du tenseur **TAM** sont indépendantes.

Examinons plus en détail ce nouveau tenseur pour les méthodes magnétiques. Par souci de clarté, nous le nommerons parfois « *supertenseur* » pour le distinguer du tenseur dérivé du potentiel. Il est, en effet, intéressant de constater que chacune de ses neuf composantes représente l'anomalie F_1 du dipôle étudié, mais avec des caractéristiques angulaires différentes. Ainsi partant de l'équation **2.31**, rappelée ci-dessous

$$F_1(x, y, z) = \tilde{m}_0 \left(L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} + N \frac{\partial}{\partial z} \right) \circ \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \circ \frac{1}{r},$$

on agit sur les cosinus directeurs de l'aimantation (l, m, n) et du champ (L, M, N) pour retrouver chaque composante du tenseur, en laissant inchangées l'intensité d'aimantation \tilde{m}_0 et la distance à l'observateur r .

Les trois composantes diagonales correspondent au même dipôle mais situé à l'équateur ou au pôle. Plus précisément, les deux premiers termes diagonaux sont, respectivement, les réductions à l'équateur dans les directions N-S et E-O de l'anomalie. Le troisième terme est la réduction au pôle. On peut vérifier ces trois assertions, à partir de l'équation **2.31** :

- i. le terme Φ_{xx} correspond la réduction à l'équateur dans la direction Nord-Sud
 $(l, m, n) = (1, 0, 0)$ et $(L, M, N) = (1, 0, 0)$;
- ii. le terme Φ_{yy} correspond à la réduction à l'équateur dans la direction Est-Ouest
 $(l, m, n) = (0, 1, 0)$ et $(L, M, N) = (0, 1, 0)$;
- iii. le terme Φ_{zz} correspond à la réduction au pôle Nord
 $(l, m, n) = (0, 0, 1)$ et $(L, M, N) = (0, 0, 1)$.

Notons que les réductions de données magnétiques, à l'équateur ou au pôle, rendent les vecteurs aimantation et champ parallèles. Les trois composantes diagonales correspondent donc à trois dipôles induits par le champ extérieur. Cependant, les trois autres composantes situées au-dessus de la diagonale correspondent à des dipôles d'aimantation rémanente. L'équation **2.31** nous éclaire aussi sur ce point :

- iv. le terme Φ_{xy} correspond à un dipôle d'aimantation Nord-Sud dans un champ extérieur orienté Est-Ouest $(l, m, n) = (1, 0, 0)$ et $(L, M, N) = (0, 1, 0)$;
- v. le terme Φ_{xz} correspond à un dipôle d'aimantation Nord-Sud dans un champ extérieur orienté verticalement $(l, m, n) = (1, 0, 0)$ et $(L, M, N) = (0, 0, 1)$;
- vi. le terme Φ_{yz} correspond à un dipôle d'aimantation Est-Ouest dans un champ extérieur orienté verticalement $(l, m, n) = (0, 1, 0)$ et $(L, M, N) = (0, 0, 1)$.

Ces transformations pourraient être qualifiées de réductions « *croisées* » orientant les vecteurs champ et aimantation orthogonalement, selon un des trois plans du repère géographique. Les trois composantes situées sous la diagonale ne font qu'échanger les rôles des vecteurs unitaires champ et aimantation. Cela confirme géométriquement la symétrie du tenseur. Ces réductions croisées offrent une vision peu usuelle de l'anomalie qui se révélera utile au **chapitre V** et **VI**.

Ce tenseur, finalement, construit à partir d'éléments connus confirme sa pertinence pour les méthodes magnétiques et prendra toute son importance au **chapitre V** avec son traitement matriciel.

Le tableau de la **figure 2.21** montre la chaîne de calculs à effectuer pour obtenir les tenseurs et supertenseurs à partir de l'anomalie. Sur fond *orange*, figurent les nouvelles fonctions. Remarquons que le **TAM** se situe bien au même niveau de dérivation que l'anomalie, tandis que le **TGM** se situe à un ordre supérieur. Par ailleurs, le **TGM** se calcule à partir du potentiel et dépend donc des directions d'aimantation tandis que le **TAM** se calcule à partir du superpotentiel et, par conséquent, n'a aucune dépendance directionnelle. Cela explique pourquoi les extrema des composantes du **TAM** sont toujours à l'aplomb de la source contrairement à celle du **TGM** ; cela sera illustré au **chapitre V**. Rappelons enfin que le **TGM** contrairement au **TAM** est accessible par la mesure tensorielle comme nous l'avons décrit à la **section 1.3**. Mais la chaîne de calcul présentée dans le tableau ci-dessous montre que sous certaines conditions, la mesure scalaire peut suffire pour accéder aux grandeurs tensorielles et vectorielles (Munsch & Fleury, 2011).

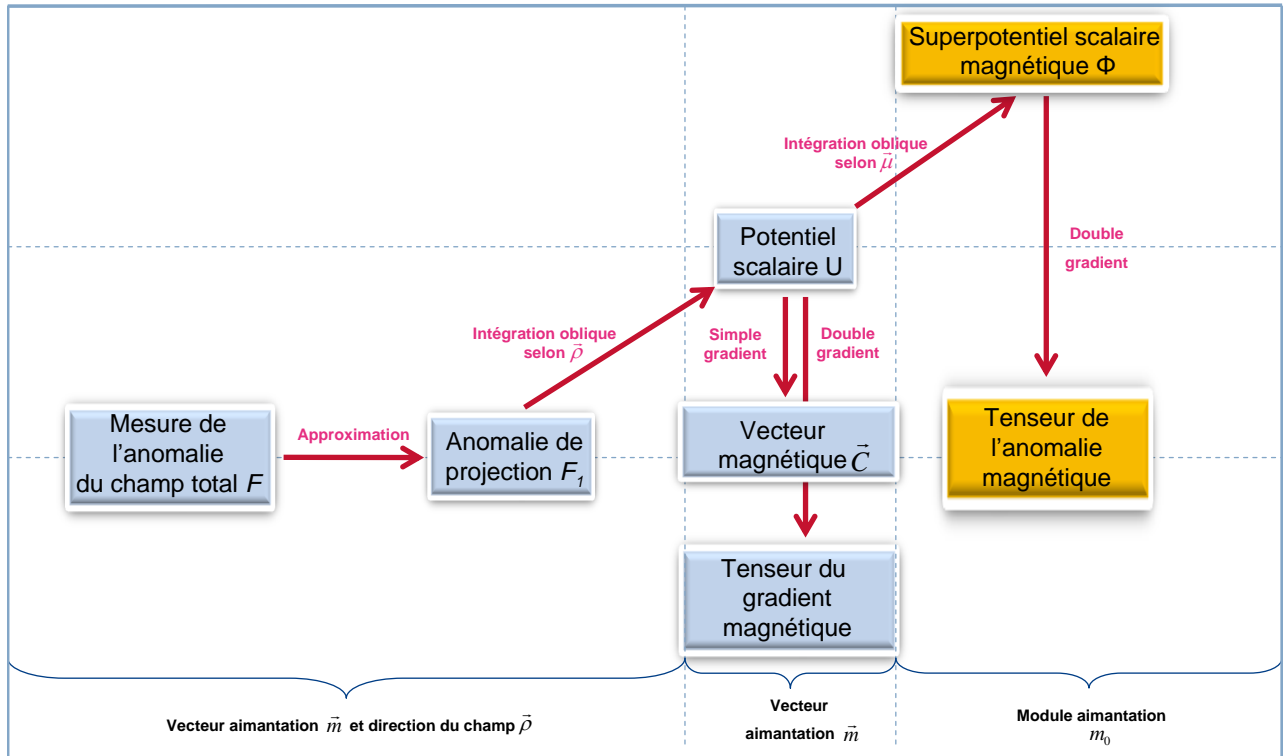


Figure 2.21 : Chaîne de calculs permettant d'obtenir les tenseurs du gradient magnétique et de l'anomalie magnétique. Les deux tenseurs ne se situent pas au même niveau de dérivation.

2.7 ÉQUATIONS DE POISSON DANS L'ESPACE ENTIER

Nous établissons les équations de Poisson pour les potentiels et anomalies dans l'espace complet en considérant la source dipolaire à l'origine. Nous expliquerons à la fin de la section en quoi ces équations sont fondamentales pour la compréhension des méthodes potentielles.

2.7.1 Potentiel scalaire magnétique

Dans l'espace entier contenant une source, l'équation de Poisson comporte un second membre non nul. Sachant que la source dipolaire est une source singulière, il faut calculer le laplacien de U au sens des distributions. Les opérateurs Δ et ∇_ρ étant interchangeables, en reprenant l'équation 2.11, on peut donc écrire

$$\Delta U = -\tilde{m}_0 \nabla_\mu \Delta \left(\frac{1}{r} \right).$$

Or en théorie des distributions (Schwartz, 1961)

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta. \quad (\text{Eq-2.86})$$

Par conséquent

$$\Delta U = 4\pi\tilde{m}_0\nabla_\mu\delta.$$

Donc dans l'espace entier avec source, l'équation de Poisson s'écrit

$$\Delta U(x, y, z) = m_0\mu_0\nabla_\mu\delta(x, y, z). \quad (\text{Eq-2.87})$$

Si l'on suppose la source en (x_0, y_0, z_0) , on a plus généralement

$$\Delta U(x, y, z) = m_0\mu_0\nabla_\mu\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0). \quad (\text{Eq-2.88})$$

2.7.2 Superpotentiel vecteur magnétique

À partir de l'équation 2.44, calculons le laplacien vectoriel de $\vec{\Pi}$ au sens des distributions

$$\vec{\Delta}\vec{\Pi} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{m}_0\Delta\left(\frac{1}{r}\right).$$

Donc en appliquant la propriété énoncée par l'équation 2.86

$$\vec{\Delta}\vec{\Pi}(x, y, z) = -\mu_0\vec{m}_0\delta(x, y, z). \quad (\text{Eq-2.89})$$

2.7.3 Superpotentiel scalaire magnétique

Calculons le laplacien de Φ au sens des distributions, à partir de l'équation 2.50,

$$\Delta\Phi = \tilde{m}_0\Delta\left(\frac{1}{r}\right), \quad (\text{Eq-2.90})$$

or le résultat de l'équation 2.86 entraîne

$$\Delta\Phi = -4\pi\tilde{m}_0\delta.$$

Donc dans l'espace entier avec source, l'équation de Poisson s'écrit

$$\Delta\Phi(x, y, z) = -m_0\mu_0\delta(x, y, z). \quad (\text{Eq-2.91})$$

Et de même dans le cas général, en supposant la source en (x_0, y_0, z_0)

$$\Delta\Phi(x, y, z) = -m_0\mu_0\delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0). \quad (\text{Eq-2.92})$$

2.7.4 Anomalie de l'intensité du champ magnétique

Calculons le laplacien de F_1 au sens des distributions, à partir de l'équation 2.29. Les opérateurs Δ , ∇_ρ et ∇_μ étant interchangeables, on peut donc écrire

$$\Delta F_1 = \tilde{m}_0 \nabla_\rho \nabla_\mu \Delta \left(\frac{1}{r} \right),$$

c'est-à-dire

$$\Delta F_1 = -4\pi\tilde{m}_0 \nabla_\rho \nabla_\mu \delta. \quad (\text{Eq-2.93})$$

Donc dans l'espace entier avec source, l'équation de Poisson s'écrit

$$\Delta F_1(x, y, z) = -m_0\mu_0 \nabla_\rho \nabla_\mu \delta(x, y, z). \quad (\text{Eq-2.94})$$

Et si l'on suppose la source en (x_0, y_0, z_0) , on obtient de façon plus générale

$$\Delta F_1(x, y, z) = -m_0\mu_0 \nabla_\rho \nabla_\mu \delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0). \quad (\text{Eq-2.95})$$

2.7.5 Équations de Poisson et méthodes potentielles

Les quatre équations de Poisson que l'on vient d'établir décrivent le lien entre la source et les potentiels (2.87, 2.89 et 2.91) puis entre la source et l'anomalie (2.94). Ces formulations locales seront étudiées sous leur forme intégrale au **chapitre IV** avec l'étude des sources quelconques au **paragraphe 4.1.3**. Ici, la source est unitaire, on obtient donc des équations de Green dont les solutions sont les expressions des potentiels et anomalie obtenues au début de ce chapitre. Ainsi, il existe deux façons d'exprimer le lien entre une source et sa fonction associée. Ces deux façons correspondent aux deux approches des méthodes magnétiques (et gravimétriques) (Al-Chalabi, M., 1971) :

- i. La *modélisation* ou le *problème direct* correspond au passage de la source aimantée à sa fonction magnétique associée (anomalie, potentiel ou superpotentiel). Ce problème est relativement simple puisque sa solution est unique. Il sera abordé jusqu'au **paragraphe 5.1** de notre développement.

- ii. L'*inversion* ou le *problème inverse* correspond au passage de la fonction magnétique à la source magnétique associée. Ce problème est déjà plus complexe car présente une infinité de solution. Il est traité à partir du **paragraphe 5.2** pour aboutir aux interprétations géologiques du **chapitre VI**.

2.8 ÉQUATIONS DE LAPLACE DANS UN DEMI-ESPACE

En géophysique, les fonctions sont rarement connues dans l'espace entier. L'étude est souvent limitée à un plan hors de la source. C'est pourquoi, dans cette section nous réécrivons les équations de Poisson dans un demi-espace hors de la source dipolaire. Ces équations ne contiennent plus de terme source : elles deviennent des équations de Laplace.

2.8.1 Potentiel scalaire magnétique

D'après l'équation 2.2 de conservation du flux magnétique, on a $\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = 0$.

Donc dans un demi-espace sans source, sachant l'égalité 2.8, U vérifie bien l'équation de Laplace

$$\Delta U = 0.$$

(Eq-2.96)

Nous l'avons vérifié analytiquement au **paragraphe 2.5.1.2** pour montrer que la trace du tenseur du gradient magnétique est nulle.

2.8.2 Superpotentiels magnétiques

En électromagnétisme classique, lorsque \vec{C} et \vec{E} vérifient l'équation de d'Alembert alors on peut en déduire que les potentiels associés respectivement U et V la vérifient également, à condition de choisir la bonne jauge.

Or d'après les équations 2.8 et 2.59, \vec{C} et U sont dans le même rapport mathématique que U et $\vec{\Pi}$. Comme U vérifie bien l'équation de Laplace, alors on démontre de façon générale le résultat déjà obtenu à l'équation 2.56

$$\vec{\Delta} \vec{\Pi} = \vec{0}.$$

D'après l'équation **2.66** $U = -\nabla_{\mu}\Phi$, par conséquent $\Delta U = -\nabla_{\mu}\Delta\Phi$. Comme U vérifie l'équation de Laplace, c'est aussi le cas pour Φ

$$\boxed{\Delta\Phi = 0.} \quad (\text{Eq-2.97})$$

Nous l'avons vérifié analytiquement au **paragraphe 2.5.2.2** pour montrer que la trace du tenseur de l'anomalie magnétique est nulle. Nous en déduisons, par ailleurs, que chaque composante i,j - prise parmi x et y - de ce tenseur vérifie l'équation de Laplace

$$\partial_i\partial_j\Delta\Phi = \Delta\partial_i\partial_j\Phi = \Delta\Phi_{ij} = 0. \quad (\text{Eq-2.98})$$

2.8.3 Anomalie de l'intensité du champ magnétique

Montrons que F_1 vérifie l'équation de Laplace. Le laplacien de l'équation **2.30**, entraîne $\Delta F_1 = -\nabla_{\rho}\Delta U$ car les opérateurs de dérivation sont interchangeables. Or d'après l'égalité **2.96**

$$\Delta U = 0,$$

donc il vient

$$\boxed{\Delta F_1 = 0.} \quad (\text{Eq-2.99})$$

Nous pouvons aussi démontrer ce résultat en utilisant la remarque du **paragraphe 2.2.2** soulignant que F_1 était homogène à un potentiel newtonien créé par un quadripôle. F_1 est donc une fonction harmonique, alors elle vérifie bien l'équation de Laplace. On peut vérifier analytiquement que F_1 obtenue à l'équation **2.35** obéit bien à l'équation de Laplace. Voici la dérivée seconde de l'anomalie de projection par rapport à x

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = 35\tilde{m}_0 \frac{3\lambda^2 - r^2}{r^9} x^2 - 10\tilde{m}_0 \frac{6\lambda l - 2x}{r^7} x - 5\tilde{m}_0 \frac{3\lambda^2 - r^2}{r^7} + \tilde{m}_0 \frac{6l^2 - 2}{r^5},$$

Après calculs des deux autres dérivées et sommation des trois termes le laplacien de F_1 , il vient

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = 6\tilde{m}_0 \frac{l^2 + m^2 + n^2 - 1}{r^5} = 0,$$

2.9 SOLUTION DE L'ÉQUATION DE LAPLACE DANS UN DEMI-ESPACE

Soit une fonction scalaire f définie dans un demi-espace sans source telle que $\Delta f = 0$. Posons $f(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Comme f vérifie l'équation de Laplace, nous obtenons

$$YZ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{Eq-2.100})$$

Divisons les deux membres de l'égalité précédente par f

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0. \quad (\text{Eq-2.101})$$

L'équation étant la somme de trois fonctions dépendant de trois variables indépendantes, la seule solution est

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -u^2, \\ \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -v^2, \\ \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = u^2 + v^2. \end{cases} \quad (\text{Eq-2.102})$$

On ne considère que les solutions pour lesquelles u et v sont réels. En posant $s^2 = u^2 + v^2$, les solutions des trois équations différentielles sont

$$\begin{cases} X(x) = g(u)e^{iux}, \\ Y(y) = k(v)e^{ivy}, \\ Z(z) = e^{sz}. \end{cases} \quad (\text{Eq-2.103})$$

Pour la solution en z , nous n'avons conservé que celle avec l'exposant positif pour éviter que la solution tende vers l'infini, en effet $z < 0$. Ce même argument permet de justifier la nature réelle de u et v . La solution élémentaire pour f s'écrit alors

$$f(x, y, z) = g(u)k(v)e^{i(ux+vy)}e^{sz}. \quad (\text{Eq-2.104})$$

On obtient une solution plus générale en intégrant sur u et v

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)k(v)e^{i(ux+vy)}e^{sz}dudv. \quad (\text{Eq-2.105})$$

En posant $\bar{f}(u, v) = g(u)k(v)$, nous reconnaissons la transformée de Fourier inverse de f calculée sur un plan de hauteur z

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(u, v)e^{i(ux+vy)}e^{sz}dudv. \quad (\text{Eq-2.106})$$

Réciproquement, en admettant que les conditions d'existence soient vérifiées

$$\bar{f}(u, v)e^{sz} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)e^{-i(ux+vy)}dxdy. \quad (\text{Eq-2.107})$$

Nous reconnaissons ici l'opérateur de *prolongement* e^{sz} qui permet de calculer $f(x, y, z_0)$ à partir de $f(x, y, 0)$. Nous expliciterons plus en détail cet outil de transformation au **chapitre VI**. Pour un prolongement nul, nous retrouvons une définition de la transformation de Fourier (Bhattacharyya, 1966 ; Bracewell, 2000)

$$\boxed{\bar{f}(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, 0)e^{-i(ux+vy)}dxdy.} \quad (\text{Eq-2.108})$$

Finalement, la résolution de l'équation de Laplace introduit naturellement la transformation de Fourier. Il semble donc pertinent de mener au chapitre suivant une étude du dipôle magnétique dans le domaine spectral.

Chapitre III

ÉTUDE DU DIPÔLE MAGNÉTIQUE DANS LE DOMAINE SPECTRAL

3.1	ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPECTRAL À TROIS DIMENSIONS.....	94
3.1.1	<i>Définition de la Transformée de Fourier directe et inverse à trois dimensions</i>	95
3.1.2	<i>Expression de l'anomalie comme produit de fonctions</i>	95
3.1.3	<i>Potentiel magnétique dipolaire</i>	97
3.1.4	<i>Superpotentiel magnétique dipolaire</i>	98
3.1.5	<i>Equations de Poisson</i>	98
3.1.5.1	<i>Anomalie de l'intensité du champ magnétique</i>	98
3.1.5.2	<i>Potentiel d'anomalie</i>	99
3.1.5.3	<i>Superpotentiel d'anomalie</i>	99
3.2.	ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPECTRAL À DEUX DIMENSIONS.....	100
3.2.1	<i>Équation de Laplace pour le potentiel sur un plan.....</i>	100
3.2.2	<i>Fonction de Green dans le domaine spectral et opérateurs de dérivation</i>	101
3.2.3	<i>Expression de l'anomalie magnétique dipolaire.....</i>	104
3.2.4	<i>Potentiel magnétique dipolaire</i>	105
3.2.5	<i>Superpotentiel magnétique dipolaire</i>	107
3.2.6	<i>Dérivation des fonctions magnétiques</i>	110
3.2.6.1	<i>Opérateur de dérivation verticale</i>	110
3.2.6.2	<i>Des potentiels aux vecteurs et tenseurs magnétiques.....</i>	112
3.3	BILAN ET CONCLUSIONS DES CHAPITRES II ET III	119

“L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques.”

Joseph Fourier

Discours préliminaire à la Théorie Analytique de la Chaleur, 1822

Chapitre III : ÉTUDE DU DIPÔLE MAGNÉTIQUE DANS LE DOMAINE SPECTRAL

Au regard de notre étude dans le domaine spatial, menée au chapitre précédent, il semble intéressant de transposer les résultats dans l'espace de Fourier pour exprimer de manière plus simple les fonctions anomalies, potentiels et superpotentiels. En effet, dans le domaine spatial, celles-ci s'obtiennent à partir d'un produit de convolution qui peut être difficile à calculer surtout si la géométrie de la source n'est plus dipolaire comme nous l'envisagerons au **chapitre IV**. Dans le domaine spectral, ces produits de convolutions deviennent de simples multiplications ; il en va de même pour les opérateurs de transformation tels que les dérivations ou les intégrations qui deviennent respectivement des multiplications ou des divisions usuelles. En plus de ces simplifications d'écriture, la signification physique des expressions spectrales est souvent plus transparente.

Cependant, d'un point de vue pratique, les traitements mathématiques appliqués aux données magnétiques, le plus souvent menés dans le domaine de Fourier nécessitent une transformation inverse vers le domaine spatial, celui des localisations dans l'espace, utile à l'interpréteur. Ces passages d'un domaine à l'autre ne se font pas sans difficultés théoriques et numériques ; elles sont aussi discutées dans ce chapitre.

3.1 ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPECTRAL À TROIS DIMENSIONS

Nous commençons par étudier le dipôle dans le domaine spectral complet, nous réduirons d'une dimension l'espace de travail à la section suivante.

On notera \bar{X} la grandeur spatiale X exprimée dans le domaine de Fourier et u , v et w les pulsations angulaires associées aux directions x , y et z .

3.1.1 Définition de la Transformée de Fourier directe et inverse à trois dimensions

Nous indiquons d'abord au lecteur la convention choisie pour les calculs de transformées de Fourier.

La transformée de Fourier directe (TF) est

$$\bar{f}(u, v, w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-i(ux+vy+wz)} dx dy dz. \quad (\text{Eq-3.1})$$

La transformée de Fourier inverse (TF⁻¹) est

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(u, v, w) e^{i(ux+vy+wz)} du dv dw. \quad (\text{Eq-3.2})$$

3.1.2 Expression de l'anomalie comme produit de fonctions

Nous avons montré à l'équation 2.36 qu'une anomalie dipolaire située en (x_0, y_0, z_0) s'exprime dans le domaine spatial comme un produit de convolution

$$F_1(x, y, z) = \tilde{m}_0 \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) * \left(\nabla_\rho \nabla_\mu \frac{1}{r} \right). \quad (\text{Eq-3.3})$$

On peut remarquer que le terme $1/r$ est considéré comme la fonction de Green reliant par le problème direct le moment magnétique de la source à l'anomalie produite puisque l'on peut tout aussi bien écrire

$$F_1(x, y, z) = \tilde{m}_0 \nabla_\rho \nabla_\mu \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) * \frac{1}{r}. \quad (\text{Eq-3.4})$$

Pour exprimer F_1 dans le domaine spectral, il suffit de calculer le produit ordinaire de deux transformées de Fourier tel que

$$\bar{F}_1(u, v, w) = \tilde{m}_0 A(u, v, w) B(u, v, w), \quad (\text{Eq-3.5})$$

avec $A(u, v, w) = TF(\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0))$ et $B(u, v, w) = TF\left(\nabla_\rho \nabla_\mu \frac{1}{r}\right)$.

Nous savons par ailleurs que le terme source s'écrit dans le domaine de Fourier

$$TF(\delta(x-x_0, y-y_0, z-z_0)) = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-iux_0} e^{-ivy_0} e^{-iwz_0}. \quad (\text{Eq-3.6})$$

On pose pour la suite

$$\overline{s_d}(u, v, w) = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-iux_0} e^{-ivy_0} e^{-iwz_0}. \quad (\text{Eq-3.7})$$

Bhattacharyya et Navolio (1976) ont calculé la transformée de Fourier de la fonction inverse au moyen des fonctions de Bessel d'ordre 0

$$TF\left(\frac{1}{r}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} e^{-i(ux+vy+wz)} dx dy dz. \quad (\text{Eq-3.8})$$

Voici le résultat qu'ils ont obtenu

$$TF\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{4\pi}{u^2 + v^2 + w^2}. \quad (\text{Eq-3.9})$$

La singularité en (0,0,0) est liée au point source contenu dans le domaine spatial 3D.

D'après le même article (Bhattacharyya et Navolio, 1976), les opérateurs de dérivation oblique définis précédemment s'écrivent dans le domaine spectral

$$TF(\nabla_\mu) = i(lu + mv + nw), \quad (\text{Eq-3.10})$$

$$TF(\nabla_\rho) = i(Lu + Mv + Nw). \quad (\text{Eq-3.11})$$

Par ailleurs, l'opérateur laplacien s'écrit dans le domaine spectral (Hsu, 1970)

$$TF(\Delta) = -(u^2 + v^2 + w^2). \quad (\text{Eq-3.12})$$

D'après les propriétés de la transformée de Fourier et les égalités 3.9, 3.10 et 3.11

$$B(u, v, w) = -\frac{4\pi}{u^2 + v^2 + w^2} (Lu + Mv + Nw)(lu + mv + nw). \quad (\text{Eq-3.13})$$

D'après les équations 3.6 et 3.13, on obtient l'expression suivante pour l'anomalie

$$\overline{F}_1(u, v, w) = -\frac{4\tilde{m}_0\pi}{u^2 + v^2 + w^2} (Lu + Mv + Nw)(lu + mv + nw)\overline{s_d}(u, v, w). \quad (\text{Eq-3.14})$$

On peut remarquer que \bar{F}_1 n'a pas de limite en (0,0,0), cela est lié à la singularité de la source contenue dans le domaine spatial 3D.

Dans le cas particulier d'un dipôle induit par le champ magnétique extérieur, l'équation **3.14** devient

$$\boxed{\bar{F}_1(u, v, w) = -\frac{4\tilde{m}_0\pi}{u^2 + v^2 + w^2} (lu + mv + nw)^2 \bar{s}_d(u, v, w).} \quad (\text{Eq-3.15})$$

L'intérêt de la notation dans l'espace de Fourier est déjà décelable dans les équations de ce paragraphe, à comparer avec celles du **paragraphe 2.2.2** écrites dans le domaine spatial. Indéniablement plus compactes, elles ont aussi l'avantage de faire apparaître des termes bien distincts dont les origines physique et mathématique sont clairement identifiables.

3.1.3 Potentiel magnétique dipolaire

Nous avons montré à l'égalité **2.17** que le potentiel d'une anomalie dipolaire située en (x_0, y_0, z_0) s'exprime dans le domaine spatial comme un produit de convolution

$$U(x, y, z) = -\tilde{m}_0 \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) * \nabla_\mu \frac{1}{r}. \quad (\text{Eq-3.16})$$

Pour exprimer U dans le domaine spectral, il faut calculer le produit ordinaire tel que

$$\bar{U}(u, v, w) = -\tilde{m}_0 TF(\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0)) TF\left(\nabla_\mu \frac{1}{r}\right). \quad (\text{Eq-3.17})$$

D'après les propriétés de la transformée de Fourier et les équations **3.9** et **3.10**

$$TF\left(\nabla_\mu \frac{1}{r}\right) = \frac{4i\pi}{u^2 + v^2 + w^2} (lu + mv + nw). \quad (\text{Eq-3.18})$$

Enfin les calculs **3.6** et **3.18**, permettent d'établir l'expression spectrale du potentiel d'anomalie

$$\boxed{\bar{U}(u, v, w) = -\frac{4i\tilde{m}_0\pi}{u^2 + v^2 + w^2} (lu + mv + nw) \bar{s}_d(u, v, w).} \quad (\text{Eq-3.19})$$

On remarque bien que le potentiel d'anomalie ne comporte que la dérivation oblique dans la direction de l'aimantation.

3.1.4 Superpotentiel magnétique dipolaire

Nous avons montré à l'équation **2.51** que le superpotentiel d'une anomalie dipolaire située en (x_0, y_0, z_0) s'exprime dans le domaine spatial comme un produit de convolution

$$\Phi(x, y, z) = \tilde{m}_0 \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) * \frac{1}{r}. \quad (\text{Eq-3.20})$$

Pour exprimer Φ dans le domaine spectral, il faut calculer le produit tel que

$$\overline{\Phi}(u, v, w) = \tilde{m}_0 TF(\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0)) TF\left(\frac{1}{r}\right). \quad (\text{Eq-3.21})$$

D'après les calculs du paragraphe précédent et les propriétés de la transformée de Fourier, on obtient l'expression suivante pour le superpotentiel d'anomalie

$$\boxed{\overline{\Phi}(u, v, w) = \frac{4\tilde{m}_0\pi}{u^2 + v^2 + w^2} \overline{s_d}(u, v, w)}. \quad (\text{Eq-3.22})$$

Cette expression montre bien que le superpotentiel ne comporte plus de dérivation oblique.

3.1.5 Equations de Poisson

Une manière de s'assurer de la validité des trois expressions ci-dessus est de montrer qu'elles vérifient bien les équations de Poisson dans le domaine spectral.

3.1.5.1 Anomalie de l'intensité du champ magnétique

En supposant la source en (x_0, y_0, z_0) , d'après l'égalité **2.94**, l'équation de Poisson vérifiée par l'AICM1 s'écrit dans le domaine spatial

$$\Delta F_1(x, y, z) = -m_0 \mu_0 \nabla_\rho \nabla_\mu \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0). \quad (\text{Eq-3.23})$$

Ce qui donne dans le domaine spectral, d'après les égalités **3.6**, **3.10**, **3.11** et **3.12**

$$-(u^2 + v^2 + w^2) \overline{F}_I(u, v, w) = m_0 \mu_0 (lu + mv + nw)(Lu + Mv + Nw) \overline{s_d}(u, v, w). \quad (\text{Eq-3.24})$$

On peut noter que l'on retrouve ainsi l'expression **3.14** de $\bar{F}_1(u, v, w)$.

3.1.5.2 Potentiel d'anomalie

En supposant la source en (x_0, y_0, z_0) , nous avons montré dans l'expression **2.87** que l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel d'anomalie s'écrit dans le domaine spatial

$$\Delta U(x, y, z) = m_0 \mu_0 \nabla_\mu \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0). \quad (\text{Eq-3.25})$$

Ce qui donne dans le domaine spectral, d'après les égalités **3.6**, **3.10** et **3.12**

$$-(u^2 + v^2 + w^2) \bar{U}(u, v, w) = i m_0 \mu_0 (lu + mv + nw) \bar{s}_d(u, v, w). \quad (\text{Eq-3.26})$$

On retrouve alors aisément l'expression **3.19** de $\bar{U}(u, v, w)$.

3.1.5.3 Superpotentiel d'anomalie

En supposant la source en (x_0, y_0, z_0) , nous avons montré à l'équation **2.91** que l'équation de Poisson vérifiée par le superpotentiel s'écrit dans le domaine spatial

$$\Delta \Phi(x, y, z) = -m_0 \mu_0 \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0). \quad (\text{Eq-3.27})$$

Ce qui donne dans le domaine spectral

$$-(u^2 + v^2 + w^2) \bar{\Phi}(u, v, w) = -m_0 \mu_0 \bar{s}_d(u, v, w). \quad (\text{Eq-3.28})$$

On peut remarquer que l'on retrouve bien l'expression **3.22** de $\bar{\Phi}(u, v, w)$.

3.2. ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPECTRAL À DEUX DIMENSIONS

En prospection géophysique, les mesures sont en pratique effectuées sur un plan horizontal OXY . En effet, les capteurs sont tenus à une distance supposée constante du sol, il n'est donc pas utile de s'intéresser à l'anomalie partout dans l'espace. On peut se limiter à l'étude d'un faisceau de plans paramétrés par la hauteur h . Cette distance est prise négative car l'axe vertical Z est orienté vers le bas.

Nous allons donc réécrire toutes les fonctions caractéristiques du dipôle magnétique dans le plan 2D de Fourier.

Pour illustrer ces fonctions, nous nous placerons dans les conditions réelles du prospecteur. Nous supposons connue l'AICM et nous utiliserons le domaine de Fourier pour évaluer numériquement les autres fonctions magnétiques. Comme au **chapitre II**, l'AICM est obtenue à partir d'une grille de 100 unités de coté, de pas 0.2 et centrée sur l'origine du repère terrestre. Le dipôle est toujours situé à 15 unités de profondeur en (0,0,15).

Nous adaptons, aisément, les définitions **3.1** et **3.2** des transformées de Fourier 3D au domaine 2D.

3.2.1 Équation de Laplace pour le potentiel sur un plan

Nous reprenons l'équation de Laplace **2.96** établi au chapitre précédent. Nous nous plaçons sur un plan horizontal OXY , en $z = h$ avec $h < 0$, en dehors de toute source magnétique. L'équation développée s'écrit alors

$$\left. \frac{\partial^2 U(x, y, h)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, h)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial z^2} \right)_{z=h} = 0. \quad (\text{Eq-3.29})$$

Nous allons résoudre cette équation dans le domaine de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 U(x, y, h)}{\partial x^2} e^{-i(ux+vy)} dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 U(x, y, h)}{\partial y^2} e^{-i(ux+vy)} dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial z^2} \bigg)_{z=h} e^{-i(ux+vy)} dx dy = 0,$$

c'est-à-dire

(Eq-3.30)

$$-u^2 \bar{U}(u, v, h) - v^2 \bar{U}(u, v, h) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, h) e^{-i(ux+vy)} dx dy \right)_{z=h} = 0. \quad (\text{Eq-3.31})$$

On obtient l'équation différentielle suivante

$$-\left(u^2 + v^2\right)\bar{U}(u, v, h) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\bar{U}(u, v, h)\Bigg|_{z=h} = 0. \quad (\text{Eq-3.32})$$

Cette équation a déjà été résolue au **paragraphe 2.9**, sa solution s'écrit

$$\bar{U}(u, v, h) = A_1(u, v)e^{\sqrt{u^2+v^2}h} + A_2(u, v)e^{-\sqrt{u^2+v^2}h}, \quad (\text{Eq-3.33})$$

avec $A_1(u, v)$ et $A_2(u, v)$, les deux constantes à déterminer.

Or, comme $h < 0$, la constante $A_2(u, v)$ doit être nulle pour éviter que la solution tende vers l'infini. Il reste alors

$$\bar{U}(u, v, h) = A_1(u, v)e^{-|h|\sqrt{u^2+v^2}}. \quad (\text{Eq-3.34})$$

La constante $A_1(u, v)$ dépend de la nature de la source ; nous calculerons au **paragraphe 3.2.4** l'expression exacte du potentiel dans le cas d'un dipôle dans le domaine spectral.

3.2.2 Fonction de Green dans le domaine spectral et opérateurs de dérivation

Bhattacharyya (1966) a calculé la transformée de Fourier 2D de la fonction inverse au moyen des fonctions de Bessel d'ordre 0

$$TF\left(\frac{1}{r}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} e^{-i(ux+vy)} dx dy, \quad (\text{Eq-3.35})$$

il a obtenu

$$TF\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-|h|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}}. \quad (\text{Eq-3.36})$$

En adaptant, la définition **3.2** au cas 2D, calculons l'expression de l'opérateur de dérivation oblique appliqué à une fonction $\varphi(x, y, h)$ quelconque dans le domaine spectral à deux dimensions

$$TF(\nabla_{\mu}\varphi(x, y, h)) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(l \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) e^{-i(ux+vy)} dx dy, \quad (\text{Eq-3.37})$$

c'est-à-dire

$$TF(\nabla_{\mu}\varphi(x, y, h)) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left((ilu + imv)\bar{\varphi}(u, v, h) + n \frac{\partial}{\partial z} \bar{\varphi}(u, v, z) \right)_{z=h}. \quad (\text{Eq-3.38})$$

Étudions le cas particulier, très utile pour la suite des développements, de la fonction inverse.

D'après l'équation 3.36, il vient

$$TF(\nabla_{\mu} \frac{1}{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \left((ilu + imv) \frac{e^{-|h|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} + n \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-|z|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} \right)_{z=h}. \quad (\text{Eq-3.39})$$

Le calcul de la dérivée et la factorisation donnent

$$TF(\nabla_{\mu} \frac{1}{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{e^{-|h|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} (ilu + imv - n\sqrt{u^2+v^2}),$$

l'expression de l'opérateur de dérivation oblique dans la direction de l'aimantation s'écrit donc

$$\boxed{TF(\nabla_{\mu}) = ilu + imv - n\sqrt{u^2+v^2}}. \quad (\text{Eq-3.40})$$

On calcule de façon analogue

$$TF(\nabla_{\rho} \frac{1}{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{e^{-|h|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} (iLu + iMv - N\sqrt{u^2+v^2}).$$

l'expression de l'opérateur de dérivation oblique dans la direction du champ s'écrit donc

$$\boxed{TF(\nabla_{\rho}) = iLu + iMv - N\sqrt{u^2+v^2}}. \quad (\text{Eq-3.41})$$

On peut faire trois remarques utiles pour la suite :

- i. Les calculs de Fourier des dérivées selon z des fonctions inverses en 2D reviennent formellement à remplacer la pulsation angulaire w introduite dans le calcul 3D par

$$\boxed{w = i\sqrt{u^2+v^2}}. \quad (\text{Eq-3.42})$$

Ainsi pour alléger les équations des paragraphes suivants, on posera souvent

$$\boxed{s = \sqrt{u^2 + v^2} .} \quad (\text{Eq-3.43})$$

- ii. Si l'on suppose que la source magnétique est située en (x_0, y_0, z_0) , le plan horizontal des mesures est situé à une hauteur $h \neq z_0$ de l'origine, i.e. ne contenant pas le dipôle, alors il faut modifier les deux termes du produit de convolution intervenant dans le calcul des fonctions magnétiques. La fonction $\frac{1}{r}$ devient $\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (h - z_0)^2}}$ et la fonction de localisation se limite à $\delta(x - x_0, y - y_0)$.

Les transformées de Fourier de ces deux fonctions se déduisent aisément des équations 3.36 et 3.6 respectivement

$$TF\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (h - z_0)^2}}\right) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-|h - z_0|\sqrt{u^2 + v^2}}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{et} \quad TF(\delta(x - x_0, y - y_0)) = \frac{1}{(2\pi)^2} (e^{-iux_0} e^{-ivy_0}).$$

(Eq-3.44)

Aussi pour alléger les équations spectrales des paragraphes suivants, l'expression analytique de la source dipolaire sera exprimée par la grandeur suivante

$$\boxed{\bar{S}_d(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} (e^{-iux_0} e^{-ivy_0}).} \quad (\text{Eq-3.45})$$

- iii. Quand on introduit la notion de dérivée, il vient naturellement à l'esprit que l'on peut appliquer cet opérateur à la fonction dérivée elle-même, et par là-même introduire la dérivée seconde, puis, par extension, les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration, opération inverse de la dérivée, peut éventuellement être considérée comme une dérivée d'ordre "moins un".

L'opérateur d'intégration oblique selon $\vec{\mu}$ revient donc à prendre l'inverse de l'opérateur de dérivation défini aux égalités 3.40 et 3.41

$$\boxed{TF(\nabla_{\mu}^{-1}) = \frac{1}{ilu + imv - n\sqrt{u^2 + v^2}}} \quad (\text{Eq-3.46})$$

et de façon analogue l'intégration oblique selon $\vec{\rho}$ s'exprime

$$TF(\nabla_{\rho}^{-1}) = \frac{1}{iLu + iMv - N\sqrt{u^2 + v^2}}. \quad (\text{Eq-3.47})$$

En généralisant ces résultats à l'analyse fractionnaire, il devient possible d'envisager des opérateurs de dérivation et intégration fractionnaires (d'ordre non entier). Dans le domaine spatial, ceux-ci s'expriment au moyen de rapports de fonction gamma Γ ; ces calculs ont été développés ces derniers siècles dans les œuvres de plusieurs mathématiciens, comme celles de Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann et d'autres... Dans le domaine spectral, l'opérateur s'écrit simplement

$$TF(\nabla_{\rho}^{\gamma}) = \left(iLu + iMv - N\sqrt{u^2 + v^2} \right)^{\gamma}, \quad (\text{Eq-3.48})$$

avec γ nombre réel positif pour la dérivation d'ordre γ et négatif pour l'intégration d'ordre γ .

3.2.3 Expression de l'anomalie magnétique dipolaire

Pour exprimer l'anomalie de projection dans le domaine spectral, on reprend l'équation 3.3 en 2D, puis on calcule le produit tel que

$$\bar{F}_1(u, v, h) = \tilde{m}_0 TF(\delta(x - x_0, y - y_0)) TF \left(\nabla_{\rho} \nabla_{\mu} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (h - z_0)^2}} \right) \right). \quad (\text{Eq-3.49})$$

On pose pour toute la suite

$$\tilde{m}_0 = \frac{\mu_0 m_0}{8\pi^2}. \quad (\text{Eq-3.50})$$

D'après les calculs 3.40, 3.41 et 3.45 du paragraphe précédent, on obtient l'expression suivante pour l'anomalie de projection

$$\bar{F}_1(u, v, h) = \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h-z_0|s}}{s} (iLu + iMv - Ns) (ilu + imv - ns) \bar{S}_d(u, v). \quad (\text{Eq-3.51})$$

Dans le cas d'un dipôle induit par le champ magnétique extérieur, l'équation 3.51 donne

$$\bar{F}_1(u, v, h) = \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h-z_0|s}}{s} (iLu + iMv - Ns)^2 \bar{S}_d(u, v). \quad (\text{Eq-3.52})$$

Un calcul numérique de l'anomalie dans le domaine spectral suivi d'une transformée de Fourier inverse donne des résultats très similaires à ceux de la **figure 2.10**. Cependant, notons que la moyenne de la fonction anomalie calculée dans le domaine de Fourier est toujours nulle quelque soit l'inclinaison et la déclinaison. En effet, ce calcul périodise la fonction sur le domaine considéré. Rappelons au passage que cette périodisation peut engendrer des discontinuités dans la fonction à transformer, le spectre alors calculé peut contenir des sur-oscillations sur les bords du domaine, c'est le phénomène de Gibbs.

3.2.4 Potentiel magnétique dipolaire

Pour exprimer U dans le domaine spectral, on reprend l'équation **3.16** en 2D, puis on calcule le produit des transformées de Fourier tel que

$$\bar{U}(u, v, h) = -\tilde{m}_0 TF(\delta(x - x_0, y - y_0)) TF\left(\nabla_\mu \frac{1}{r}\right). \quad (\text{Eq-3.53})$$

D'après les calculs **3.40** et **3.45** du paragraphe précédent, on obtient l'expression suivante pour le potentiel d'anomalie

$$\bar{U}(u, v, h) = -\tilde{m}_0 \frac{e^{-|h-z_0|s}}{s} (ilu + imv - ns) \bar{S}_d(u, v). \quad (\text{Eq-3.54})$$

Un calcul numérique de cette équation discrétisée dans le domaine spectral puis transformée dans le domaine spatial donnerait des résultats très similaires à ceux de la **figure 2.6**. Cependant, ce mode de calcul a peu d'application en pratique, puisque le point de départ est l'anomalie du champ total mesurée sur un plan OXY. C'est pourquoi, nous avons recours à l'équation **2.30** $F_1 = -\nabla_\rho U$, qui s'exprime simplement dans le domaine de Fourier

$$\bar{U}(u, v, h) = -\frac{\bar{F}_1(u, v, h)}{iLu + iMv - Ns}. \quad (\text{Eq-3.55})$$

C'est donc la relation **3.55** qui permet, en pratique, d'obtenir le potentiel connaissant l'AICM1. Cette opération pose des difficultés dans le domaine spatial, du fait de l'intégration oblique, mais peut être menée dans le domaine spectral (Lima et Weiss, 2009). En contrepartie, de nouveaux problèmes apparaissent avec le calcul spectral pour certaines valeurs de déclinaison et inclinaison. Dans les simulations qui suivent, nous présentons les résultats de ces intégrations spectrales après calcul de la transformée de Fourier inverse.

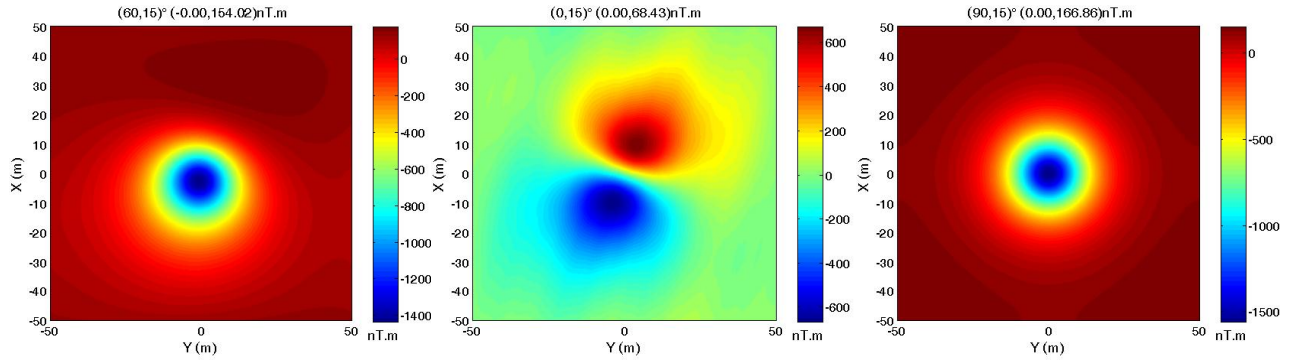


Figure 3.1 : Potentiel d'anomalie magnétique créé par des dipôles d'inclinaison et de déclinaison variables (calcul par intégration dans le domaine spectral).

Nous constatons, sur le graphe au *milieu* de la **figure 3.1**, que le calcul du potentiel pour les faibles inclinaisons semble divergent, cela est visible par des linéations naissantes.

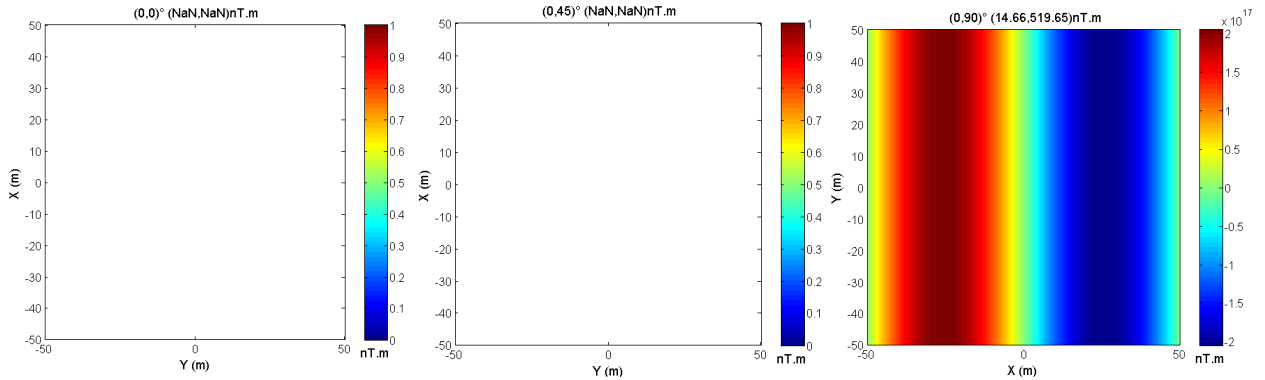
Tout d'abord, il est intéressant de noter que l'allure des différents graphes issus du calcul spatial (**figure 2.6**) et du calcul spectral (**figure 3.1**) est, bien entendu, similaire. Seules exceptions, les calculs, basés sur la relation **3.55** pour les inclinaisons nulles, montrent des instabilités de calcul. En effet, pour ces valeurs comme $N = \sin I \approx 0$, l'anomalie \bar{F}_1 est divisée par $iLu + iMv$. Ainsi cette expression peut s'annuler pour certaines valeurs de L et de M tel que

$$Lu + Mv = 0, \quad (\text{Eq-3.56})$$

c'est-à-dire

$$\frac{u}{v} = -\frac{M}{L} = -\frac{\sin D}{\cos D} = -\tan D. \quad (\text{Eq-3.57})$$

En fait comme le montre la **figure 3.2**, ces problèmes de calcul apparaissent aussi pour des gammes plus larges d'inclinaisons et de déclinaisons. À inclinaisons nulle et sub-nulles comprises dans l'intervalle $(-10^\circ ; 10^\circ)$, des artéfacts de calculs apparaissent quelque soit la déclinaison.



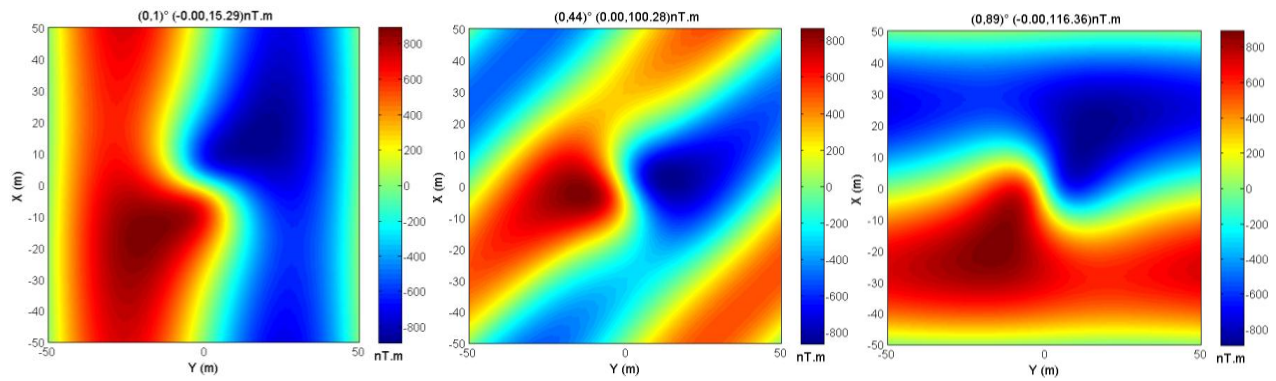


Figure 3.2 : Potentiel d'anomalie magnétique créée par un dipôle horizontal pour différentes déclinaisons (calcul par intégration spectrale) ; les cadres laissés blancs correspondent à des cas indéterminés.

Pour faire disparaître ces artéfacts de calculs, il faut augmenter la dimension de la grille de calcul. Nous calculons le potentiel par intégration spectrale sur une grille allant de -150 à +150, mais avec un pas de 0.5 pour diminuer le temps de calcul. Cela revient à faire tendre davantage la fonction vers 0 sur les bords du domaine et à se rapprocher des conditions de réelle périodicité, nécessaire pour le calcul d'une transformée de Fourier discrète. À la **figure 3.3**, l'espace de représentation est toujours un carré de 100 unités de côté, centré sur l'origine. Les graphes du potentiel ne présentent plus d'allongements.

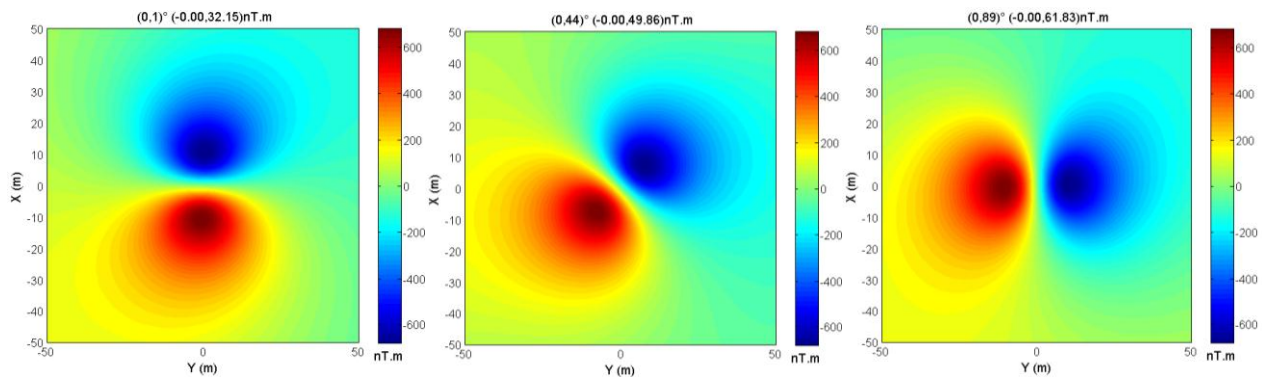


Figure 3.3 : Potentiel d'anomalie magnétique créé par des dipôles de moments horizontaux et de déclinaisons variables (calcul par intégration spectrale).

Cependant pour les couples $(0^\circ, 0^\circ)$, $(0^\circ, 45^\circ)$ et $(0^\circ, 90^\circ)$ l'instabilité demeure. Ils correspondent à des divisions par des nombres sub-nuls.

3.2.5 Superpotentiel magnétique dipolaire

Pour exprimer Φ dans le domaine spectral, on reprend l'équation **2.51** en 2D, puis on calcule le produit tel que

$$\overline{\Phi}(u, v, h) = \tilde{m}_0 TF(\delta(x - x_0, y - y_0)) TF\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (h - z_0)^2}}\right). \quad (\text{Eq-3.58})$$

D'après les calculs 3.44 et 3.45, on obtient l'expression suivante pour le superpotentiel d'anomalie

$$\overline{\Phi}(u, v, h) = \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h-z_0|s}}{s} \overline{S}_d(u, v). \quad (\text{Eq-3.59})$$

La représentation graphique de la transformée inverse de cette fonction est très similaire à celle obtenue à la **figure 2.14**. Nous obtenons une fonction symétrique et présentant un maximum à l'aplomb de la source. Celle-ci n'est plus positive partout car le passage par le domaine spectral a périodisé la fonction de façon à annuler sa moyenne.

D'après l'équation 2.73 $F_1 = \nabla_\rho \nabla_\mu \Phi$, on peut ainsi exprimer $\overline{\Phi}$ à partir de \overline{F}_1 de la manière suivante

$$\overline{\Phi}(u, v, h) = \frac{\overline{F}_1(u, v, h)}{(iLu + iMv - Ns)(ilu + imv - ns)}. \quad (\text{Eq-3.60})$$

En pratique, la méconnaissance de la direction du moment magnétique de la source nous contraint à supposer un moment magnétique induit par le champ extérieur ; l'équation 3.60 se simplifie en

$$\overline{\Phi}(u, v, h) = \frac{\overline{F}_1(u, v, h)}{(iLu + iMv - Ns)^2}. \quad (\text{Eq-3.61})$$

Tout comme pour le potentiel, le calcul du superpotentiel, pour les faibles inclinaisons, présente des instabilités. En effet, comme nous l'avons déjà montré au **paragraphe 3.2.4**, l'anomalie \overline{F}_1 subit des divisions par des nombres proches de 0.

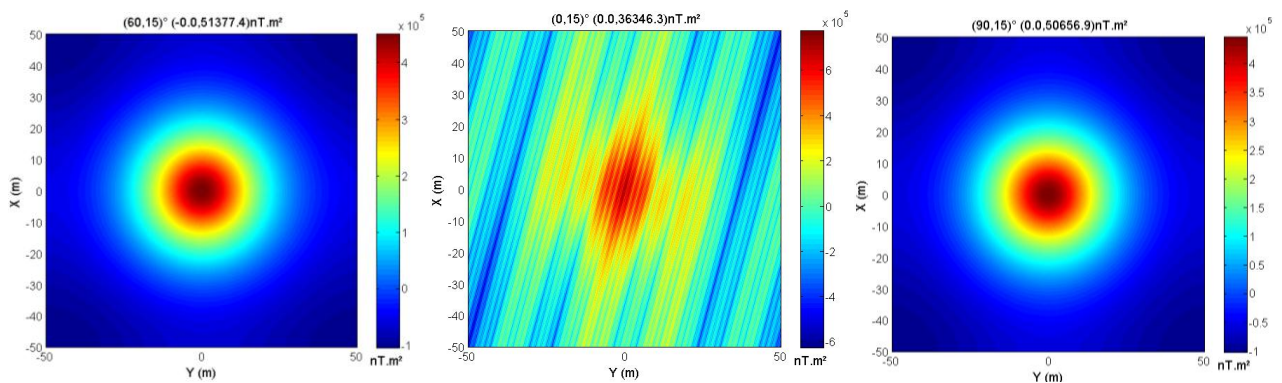


Figure 3.4 : Superpotentiel d'anomalie magnétique calculé pour différents dipôles (calcul par intégration spectrale).

Notons qu'en l'absence d'artéfacts de calculs, ces graphes seraient tous identiques. Comme le montre la **figure 3.5**, ces problèmes apparaissent aussi pour des gammes plus larges d'inclinaisons et de déclinaisons : ces artéfacts sont plus ou moins visibles quelque soit la déclinaison pour des inclinaisons comprises entre -20° et 20° .

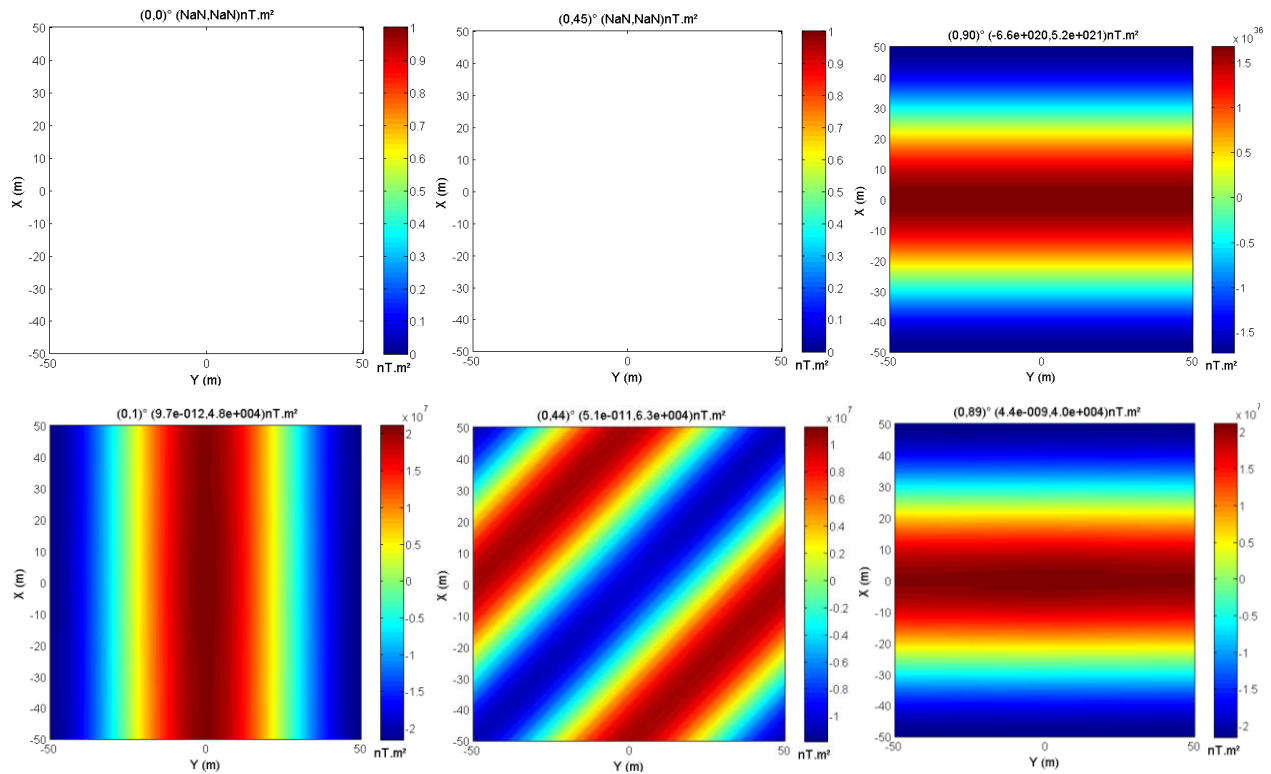


Figure 3.5 : Superpotentiel d'anomalie magnétique créée par des dipôles horizontaux de déclinaisons différentes (calcul par intégration spectrale).

Pour faire disparaître ces linéations parasites, il faut augmenter la dimension de la grille de calcul. À la **figure 3.6**, nous calculons le superpotentiel par intégration spectrale sur une grille allant de -2500 à +2500, mais avec un pas de 3 pour diminuer le temps de calcul et ne pas saturer la mémoire de l'ordinateur. Nous représentons la carte sur un carré de 100 unités de côté.

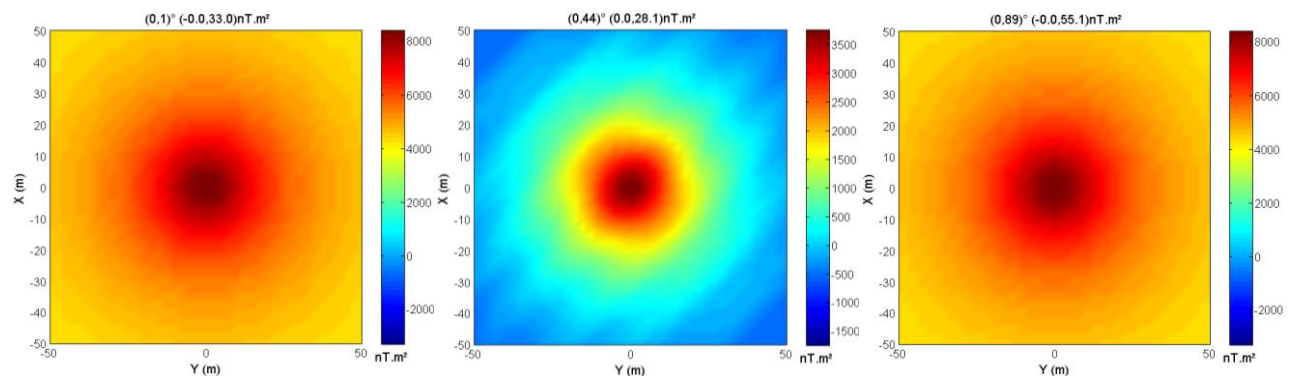


Figure 3.6 : Superpotentiel d'anomalie magnétique créée par des dipôles d'inclinaisons et de déclinaisons variables (calcul par intégration spectrale).

Les graphes du superpotentiel présentent moins d'instabilité et pourraient être améliorés encore en augmentant les dimensions de la grille de calcul. Le calcul du superpotentiel dans le domaine spectral nécessite deux intégrations de la fonction anomalie, il est donc moins stable que le calcul du potentiel qui en nécessite qu'une seule. C'est pourquoi la correction des artefacts du superpotentiel nécessite de travailler sur une grille plus étendue que pour le potentiel.

Cependant pour les couples d'angle suivants : $(0^\circ, 0^\circ)$, $(0^\circ, 45^\circ)$ et $(0^\circ, 90^\circ)$, l'instabilité demeure.

3.2.6 Dérivation des fonctions magnétiques

3.2.6.1 Opérateur de dérivation verticale

Dans le domaine spectral 2D, il est aussi possible de définir l'opérateur de dérivation verticale

$$TF\left(\frac{\partial \phi(x, y, h)}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z} \bar{\phi}(u, v, z) \Big|_{z=h}. \quad (\text{Eq-3.62})$$

Nous avons déjà traité le cas de la fonction $1/r$, intéressons-nous aux fonctions magnétiques définies dans les paragraphes précédents

$$TF\left(\frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) \Big|_{z=h}\right) = \frac{\partial}{\partial z} \bar{U}(u, v, z) \Big|_{z=h}. \quad (\text{Eq-3.63})$$

D'après l'équation 3.17, il vient

$$TF\left(\frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) \Big|_{z=h}\right) = -\tilde{m}_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(TF(\delta(x - x_0, y - y_0)) TF\left(\nabla_\mu \frac{1}{r}\right) \right) \Big|_{z=h}. \quad (\text{Eq-3.64})$$

D'après les expressions 3.40 et 3.44, il vient

$$TF\left(\frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) \Big|_{z=h}\right) = -\tilde{m}_0 \bar{S}_d(u, v) \left(i l u + i m v - n \sqrt{u^2 + v^2} \right) \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-|z| \sqrt{u^2 + v^2}}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \Big|_{z=h}. \quad (\text{Eq-3.65})$$

La dérivation donne

$$TF\left(\frac{\partial}{\partial z} U(x, y, z) \Big|_{z=h}\right) = -\tilde{m}_0 (i l u + i m v - n s) e^{-|h-z_0|s} \bar{S}_d(u, v). \quad (\text{Eq-3.66})$$

En comparant les équations **3.54** et **3.66**, on peut finalement écrire

$$TF\left(\frac{\partial}{\partial z}U(x, y, z)\right)_{z=h} = s\bar{U}(u, v, h). \quad (\text{Eq-3.67})$$

Ce résultat sera mis à profit dans le paragraphe suivant. Par ailleurs, on établit de façon identique les deux relations suivantes

$$TF\left(\frac{\partial}{\partial z}F_1(x, y, z)\right)_{z=h} = s\bar{F}_1(u, v, h) \quad (\text{Eq-3.68})$$

et

$$TF\left(\frac{\partial}{\partial z}\Phi(x, y, z)\right)_{z=h} = s\bar{\Phi}(u, v, h). \quad (\text{Eq-3.69})$$

On peut généraliser ce calcul à des ordres de dérivation γ quelconque ; pour la fonction \bar{F}_1 on obtient

$$TF\left(\frac{\partial^\gamma}{\partial z^\gamma}F_1(x, y, z)\right)_{z=h} = s^\gamma \bar{F}_1(u, v, h). \quad (\text{Eq-3.70})$$

Notons que pour $\gamma = 2$, ce terme constitue le numérateur de l'opérateur de réduction au pôle détaillé au **chapitre VI**. Pour l'anomalie dipolaire, la dérivée verticale d'ordre 2 donne une fonction de très faible amplitude, rendant difficile toute discussion sur le graphique. Dans ce cas, il est pertinent d'explorer les cas atypiques, introduits dans la troisième remarque du **paragraphe 3.2.2**, des dérivations d'ordre fractionnaire. La **figure 3.7** présente, respectivement, les dérivées verticales d'ordre 0.5, 1 et 1.3 appliquées à l'anomalie de projection créée par le dipôle. Ici, l'ordre fractionnaire de dérivation 1.3 semble être une limite supérieure de détection du dipôle.

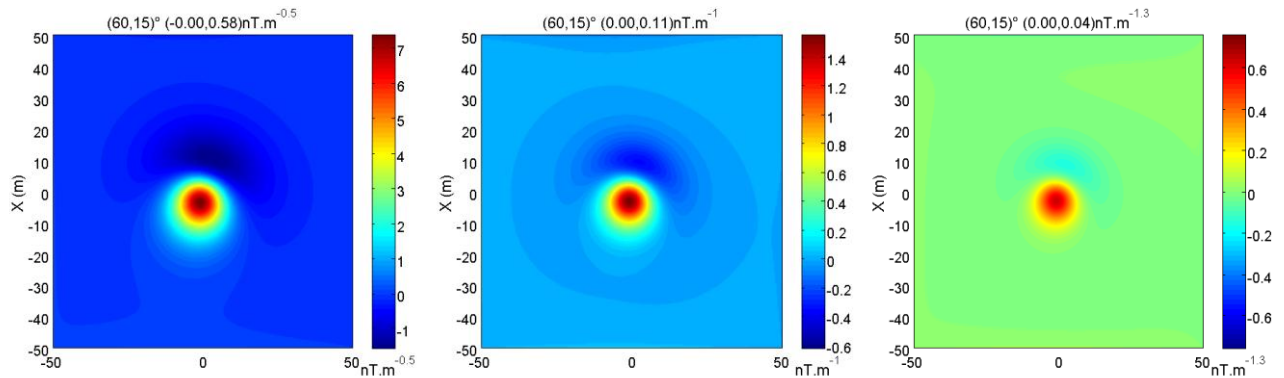


Figure 3.7 : Cartes de dérivée verticale du dipôle aux ordres 0.5, 1 et 1.3 (calcul par dérivation spectrale).

Remarquons que l'augmentation de l'ordre de dérivation permet une meilleure localisation dans le plan horizontal de l'objet. Sur des données réelles, cet avantage est modéré par l'amplification du bruit inhérent à toute mesure.

3.2.6.2 Des potentiels aux vecteurs et tenseurs magnétiques

Examinons comment à partir des potentiels et superpotentiels, il est possible, en pratique, de calculer dans le domaine spectral les trois composantes du vecteur champ magnétique ainsi que les tenseurs magnétiques. Nous considérons dans les paragraphes suivants une source dipolaire à l'origine.

3.2.6.2.1 A partir du potentiel magnétique

3.2.6.2.1.1 Calcul du champ d'anomalie magnétique

D'après la relation **2.8** $\vec{C} = -\vec{\nabla}U$, il est facile de passer du potentiel magnétique au champ $\bar{C}_x(u, v, h) = -iu\bar{U}(u, v, h)$, $\bar{C}_y(u, v, h) = -iv\bar{U}(u, v, h)$ et $\bar{C}_z(u, v, h) = s\bar{U}(u, v, h)$. **(Eq-3.71)**

Nous avons vu au **paragraphe 3.2.4** qu'il est possible, sous certaines réserves, de calculer le potentiel à partir de l'anomalie de projection par intégration dans le domaine spectral. En vertu des équations **3.71**, il devient possible d'en déduire les trois composantes du champ d'anomalie magnétique (Lima et Weiss, 2009).

Calculons ces trois composantes spectrales du champ d'anomalie à partir de l'expression du potentiel donnée par l'égalité **3.54** en $z_0 = 0$

$$\begin{aligned}\bar{C}_x(u, v, h) &= \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|s}}{s} iu(il u + im v - ns) \bar{S}_d(u, v), \\ \bar{C}_y(u, v, h) &= \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|s}}{s} iv(il u + im v - ns) \bar{S}_d(u, v), \\ \bar{C}_z(u, v, h) &= -\tilde{m}_0 e^{-|h|s} s(il u + im v - ns) \bar{S}_d(u, v).\end{aligned}\tag{Eq-3.72}$$

Nous appliquons cette procédure en utilisant une simulation numérique sous *Matlab* qui permet d'obtenir chaque composante pour les différentes combinaisons d'angle. Elles sont représentées à la **figure 3.8**.

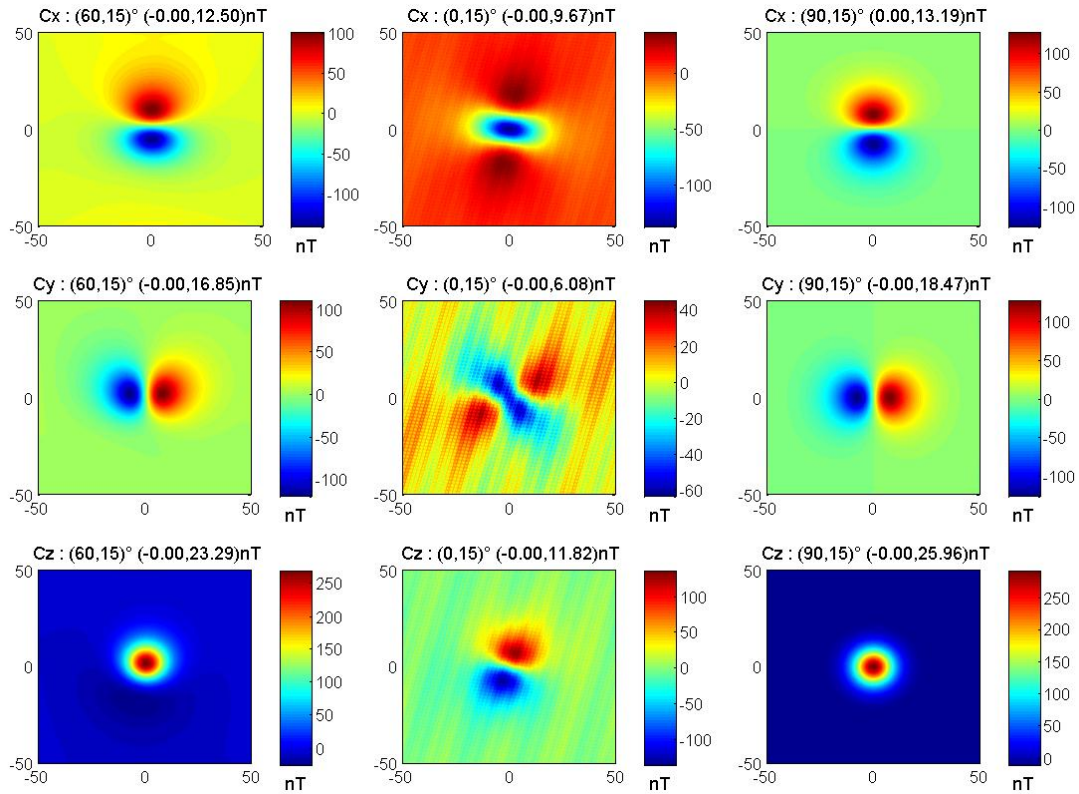


Figure 3.8 : Composantes du champ d'anomalie dipolaire pour des inclinaisons et déclinaisons variables (calcul spectral).

Il est rassurant de noter la similitude de ces résultats avec ceux de la **figure 2.8**. Seuls des artefacts liés au passage par le domaine de Fourier pour de faibles inclinaisons dégradent les résultats.

3.2.6.2.1.2 Diminution de l'écart entre l'AICM et l'AICM1

Afin de diminuer l'écart entre les deux anomalies, mis en évidence dans la simulation du **paragraphe 2.2.4**, nous allons mettre à profit la relation **1.20** permettant d'estimer l'AICM1 à partir de l'AICM. Il faut préciser que cette relation nécessite la norme C qui n'est pas mesurée en pratique. Cependant, en combinant les relations **2.8** et **1.11**, cette grandeur devient accessible. Cela peut être facilement mis en œuvre dans le domaine de Fourier en utilisant le potentiel comme intermédiaire de calcul. Afin de mettre en évidence cette amélioration, nous réutilisons la simulation déjà présentée au **paragraphe 2.2.4**, en remplaçant l'AICM mesurée par l'AICM1 estimée. Celle-ci est comparée à la vraie AICM1, donnée par le modèle. De la même façon, nous fixons arbitrairement d'abord la déclinaison à 15° puis ensuite l'inclinaison à 45° . On suppose un champ de référence moyen $R = 50000 \text{ nT}$.

Sur le graphe à *gauche* de la **figure 3.9**, nous calculons les différences maximales entre l'AICM1 vraie issue de l'équation **2.35** et l'AICM1 estimée par la relation **1.20** en fonction de l'inclinaison

et de l'amplitude de l'AICM. Ensuite à *droite*, la même comparaison est menée en faisant varier la déclinaison.

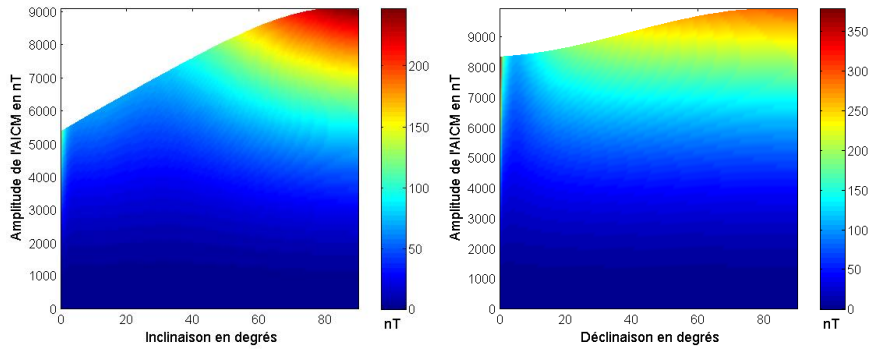


Figure 3.9 : Représentations des différences maximales entre l'AICM1 estimée et l'AICM1 donnée par le modèle pour des inclinaisons et intensités variables (à gauche) et pour des déclinaisons et intensités variables (à droite).

Pour ces simulations, l'intensité de l'anomalie dipolaire varie aussi de 0 à 9000 nT. Sur les deux graphes, les différences maximales sont divisées par 2 par rapport à celles de la **figure 2.13** observées pour des inclinaison et déclinaison de 90°. Un écart persiste entre les deux anomalies, cela est dû aux limites de la mise en œuvre de cette méthode entachée de deux inconvénients : l'utilisation de la fonction F comme point de départ du calcul et sa transformation dans le domaine de Fourier pour évaluer U par la relation 3.55 puis C par les relations 3.71.

3.2.6.2.1.3 Calcul du tenseur du gradient magnétique

Le *Tenseur du Gradient Magnétique* s'écrit dans le domaine spectral comme suit

$$\overline{\mathbf{TGM}} = \begin{bmatrix} -u^2 & -uv & -ius \\ -uv & -v^2 & -ivs \\ -ius & -ivs & s^2 \end{bmatrix} \overline{U}. \quad (\text{Eq-3.73})$$

D'après l'équation 3.54, les trois composantes diagonales sont

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{TGM}}_{11}(u, v, h) &= \tilde{m}_0 u^2 \frac{e^{-|h|s}}{s} (ilu + imv - ns) \overline{S}_d(u, v), \\ \overline{\mathbf{TGM}}_{22}(u, v, h) &= \tilde{m}_0 v^2 \frac{e^{-|h|s}}{s} (ilu + imv - ns) \overline{S}_d(u, v), \\ \overline{\mathbf{TGM}}_{33}(u, v, h) &= -\tilde{m}_0 s e^{-|h|s} (ilu + imv - ns) \overline{S}_d(u, v). \end{aligned} \quad (\text{Eq-3.74})$$

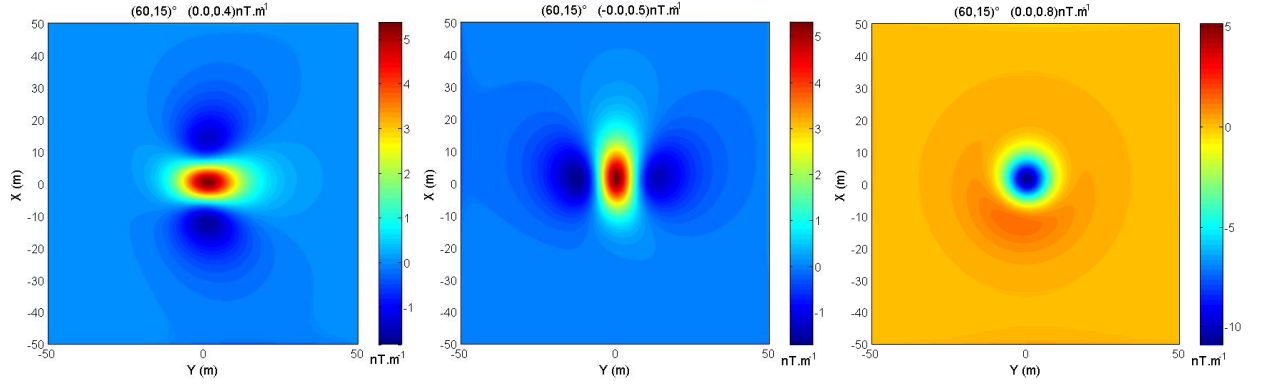


Figure 3.10 : Représentation des trois composantes diagonales du tenseur U_{xx} , U_{yy} et U_{zz} (calcul spectral).

Les trois composantes non diagonales sont

$$\begin{aligned}\overline{\text{TGM}}_{12}(u, v, h) &= \tilde{m}_0 uv \frac{e^{-|h|s}}{s} (ilu + imv - ns) \bar{S}_d(u, v), \\ \overline{\text{TGM}}_{13}(u, v, h) &= i\tilde{m}_0 ue^{-|h|s} (ilu + imv - ns) \bar{S}_d(u, v), \\ \overline{\text{TGM}}_{23}(u, v, h) &= i\tilde{m}_0 ve^{-|h|s} (ilu + imv - ns) \bar{S}_d(u, v).\end{aligned}\tag{Eq-3.75}$$

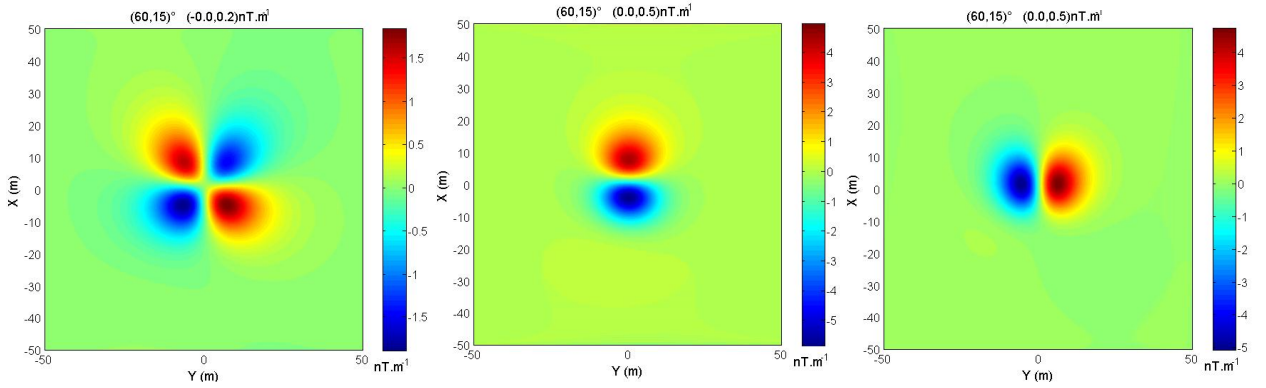


Figure 3.11 : Représentation des trois composantes non diagonales du tenseur U_{xy} , U_{xz} et U_{yz} (calcul spectral).

Ces représentations graphiques obtenues en condition de « *terrain* », c'est-à-dire par intégration oblique de l'anomalie puis double dérivation dans le domaine spectral, sont très similaires à celles obtenues dans le domaine spatial à la **figure 2.17** et à la **figure 2.18**. En effet, dans cette gamme d'inclinaison, le passage par le domaine de Fourier ne pose pas de problème.

3.2.6.2.2 A partir du superpotentiel scalaire

3.2.6.2.2.1 Calcul du champ d'anomalie magnétique

D'après l'équation **2.76** $\vec{C} = \vec{\nabla} \nabla_{\mu} \Phi$, il est donc possible de passer du superpotentiel au champ

$$\begin{aligned}\bar{C}_x(u, v, h) &= iu(ilu + imv - ns)\bar{\Phi}, \\ \bar{C}_y(u, v, h) &= iv(ilu + imv - ns)\bar{\Phi}, \\ \bar{C}_z(u, v, h) &= -s(ilu + imv - ns)\bar{\Phi}.\end{aligned}\tag{Eq-3.76}$$

Calculons les trois composantes spectrales du champ d'anomalie à partir de l'expression de $\bar{\Phi}$ donnée par l'équation **3.59**

$$\begin{aligned}\bar{C}_x(u, v, h) &= \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|s}}{s} iu(ilu + imv - ns)\bar{S}_d(u, v), \\ \bar{C}_y(u, v, h) &= \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|s}}{s} iv(ilu + imv - ns)\bar{S}_d(u, v), \\ \bar{C}_z(u, v, h) &= -\tilde{m}_0 e^{-|h|s} (ilu + imv - ns)\bar{S}_d(u, v).\end{aligned}\tag{Eq-3.77}$$

Ce résultat est identique aux équations **3.72** et donne des représentations graphiques analogues à celles de la **figure 3.8**.

3.2.6.2.2.2 Calcul du tenseur de l'anomalie magnétique

Dans le domaine de Fourier, nous définissons le *Tenseur de l'Anomalie Magnétique* comme suit (Munschy & Fleury, 2011)

$$\overline{\mathbf{TAM}}(u, v, h) = \begin{bmatrix} -u^2 & -uv & -ius \\ -uv & -v^2 & -ivs \\ -ius & -ivs & s^2 \end{bmatrix} \bar{\Phi}.\tag{Eq-3.78}$$

D'après l'égalité 3.59, les trois composantes diagonales sont

$$\begin{aligned}\overline{\text{TAM}}_{11}(u, v, h) &= -u^2 \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|s}}{s} \bar{S}_d(u, v), \\ \overline{\text{TAM}}_{22}(u, v, h) &= -v^2 \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|s}}{s} \bar{S}_d(u, v), \\ \overline{\text{TAM}}_{33}(u, v, h) &= \tilde{m}_0 s e^{-|h|s} \bar{S}_d(u, v).\end{aligned}\tag{Eq-3.79}$$

Et leurs représentations graphiques sont sur la **figure 3.12**.

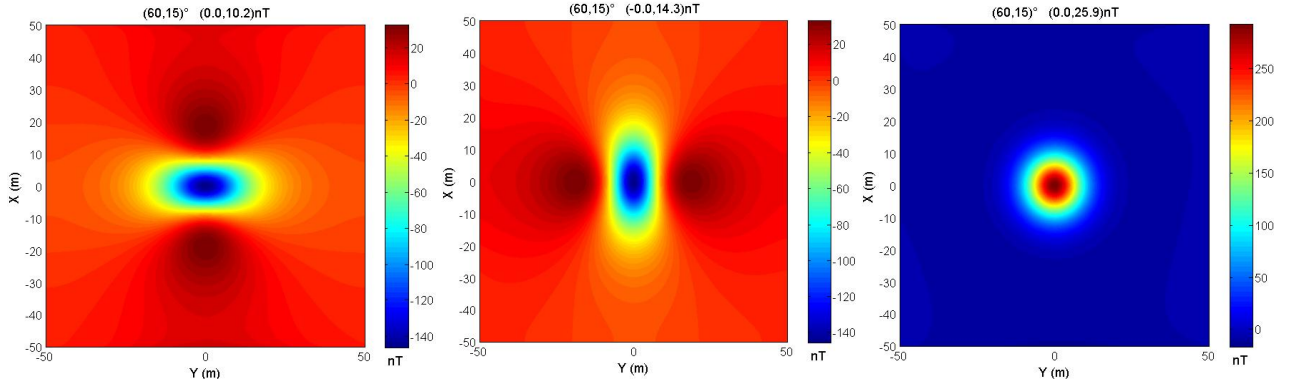


Figure 3.12 : Représentation des trois composantes diagonales du tenseur Φ_{xx} , Φ_{yy} et Φ_{zz} (calcul spectral).

Les trois composantes non diagonales sont

$$\begin{aligned}\overline{\text{TAM}}_{12}(u, v, h) &= -uv \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|s}}{s} \bar{S}_d(u, v), \\ \overline{\text{TAM}}_{13}(u, v, h) &= -iu \tilde{m}_0 e^{-|h|s} \bar{S}_d(u, v), \\ \overline{\text{TAM}}_{23}(u, v, h) &= -iv \tilde{m}_0 e^{-|h|s} \bar{S}_d(u, v).\end{aligned}\tag{Eq-3.80}$$

Et leurs représentations graphiques sont sur la **figure 3.13**.

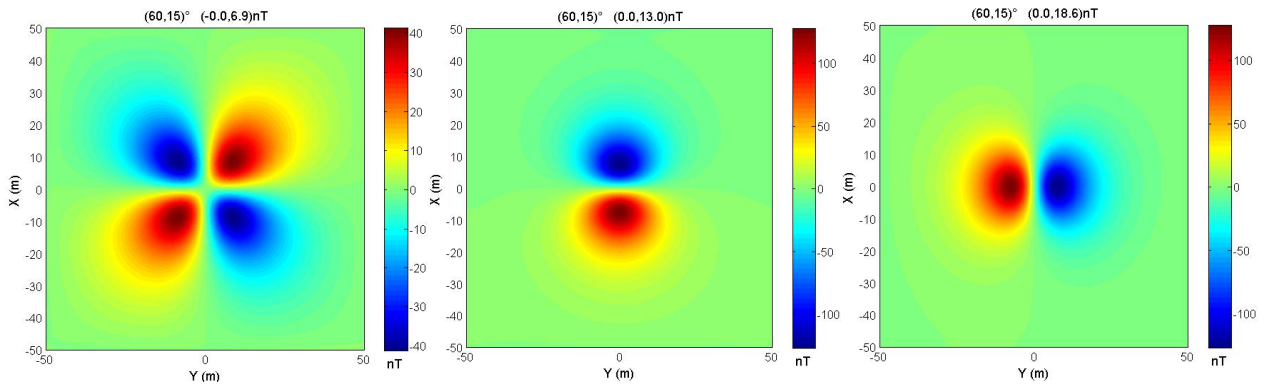


Figure 3.13 : Représentation des trois composantes non diagonales du tenseur Φ_{xy} , Φ_{xz} et Φ_{yz} (calcul spectral).

Pour obtenir en pratique ces deux tenseurs ainsi que toutes les autres fonctions magnétiques vues précédemment, il est plus facile d'opérer dans le domaine spectral que dans le domaine spatial. La chaîne de traitement est synthétisée en conclusion de ce chapitre.

3.2.6.2.2.3 Calcul du superpotentiel vecteur magnétique

D'après le résultat **2.74**, l'expression des composantes du superpotentiel vecteur dans le domaine de Fourier est

$$\begin{pmatrix} \overline{\Pi}_x \\ \overline{\Pi}_y \\ \overline{\Pi}_z \end{pmatrix} = \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|s}}{s} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \overline{S}_d(u, v). \quad (\text{Eq-3.81})$$

3.2.6.2.3 A partir du superpotentiel vecteur

3.2.6.2.3.1 Calcul du potentiel vecteur magnétique

D'après la relation **2.42** $\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \overline{A}_x \\ \overline{A}_y \\ \overline{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iv\overline{\Pi}_z + s\overline{\Pi}_y \\ -s\overline{\Pi}_x - iu\overline{\Pi}_z \\ iu\overline{\Pi}_y - iv\overline{\Pi}_x \end{pmatrix}. \quad (\text{Eq-3.82})$$

D'après l'équation **3.81**, on obtient aisément l'expression du potentiel vecteur magnétique

$$\begin{pmatrix} \overline{A}_x \\ \overline{A}_y \\ \overline{A}_z \end{pmatrix} = \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|s}}{s} \begin{pmatrix} ivn + sm \\ -sl - iun \\ ium - ivl \end{pmatrix} \overline{S}_d(u, v). \quad (\text{Eq-3.83})$$

3.2.6.2.3.2 Calcul du champ d'anomalie magnétique

D'après la relation **2.3** $\vec{C} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, c'est-à-dire dans le domaine spectral

$$\begin{pmatrix} \overline{C}_x \\ \overline{C}_y \\ \overline{C}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iv\overline{A}_z + s\overline{A}_y \\ -s\overline{A}_x - iu\overline{A}_z \\ iu\overline{A}_y - iv\overline{A}_x \end{pmatrix}. \quad (\text{Eq-3.84})$$

Il suffit de remplacer dans cette expression les dérivées partielles obtenues dans l'équation **3.83** pour retrouver l'expression du champ dipolaire

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_x \\ \bar{C}_y \\ \bar{C}_z \end{pmatrix} = \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|s}}{s} \begin{pmatrix} iv(ium - ivl) + s(-sl - iun) \\ -s(ivn + sm) - iu(ium - ivl) \\ iu(-sl - iun) - iv(ivn + sm) \end{pmatrix} \bar{S}_d(u, v). \quad (\text{Eq-3.85})$$

En arrangeant cette expression à partir du résultat de l'équation **3.43**, on obtient

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_x \\ \bar{C}_y \\ \bar{C}_z \end{pmatrix} = \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|s}}{s} \begin{pmatrix} -u^2l - uvm - insu \\ -vul - v^2m - isvn \\ -iusl - ivsm + s^2n \end{pmatrix} \bar{S}_d(u, v). \quad (\text{Eq-3.86})$$

En mettant en facteur les pulsations spectrales, on retrouve immédiatement les trois composantes du champ d'anomalie dipolaire de l'équation **3.72**.

3.3 BILAN ET CONCLUSIONS DES CHAPITRES II ET III

Nous avons montré au **chapitre II** que l'anomalie du champ total est en général un bon estimateur de l'anomalie de projection. L'écart maximum entre ces deux grandeurs est de l'ordre de 5 % pour des anomalies dipolaires (cf. **paragraphe 2.2.4**). Cela permet de justifier l'applicabilité des méthodes potentielles à la fonction anomalie du champ total. Nous avons de plus proposé une méthode pour diminuer cet écart (cf. **paragraphe 3.2.6.2.1.2**).

Ensuite, nous avons montré comment à partir de l'anomalie de projection il est possible de calculer les cinq fonctions magnétiques caractéristiques. Les dix relations de passage ont été établies au **chapitre II** dans le domaine spatial. Elles sont synthétisées à la **figure 2.16**. Cependant, ces relations sont difficilement exploitables dans le domaine spatial. C'est pourquoi en méthode magnétique, il est d'usage de recourir au domaine de Fourier, introduit au **chapitre III**. Dans ce chapitre, nous avons montré que ces fonctions et leurs relations de passage sont transposables au domaine spectral. Le tableau suivant propose une synthèse de nos résultats. Il représente une transposition dans le domaine des fréquences du tableau de la **figure 2.21** et indique les opérateurs à appliquer pour passer d'une fonction à l'autre.

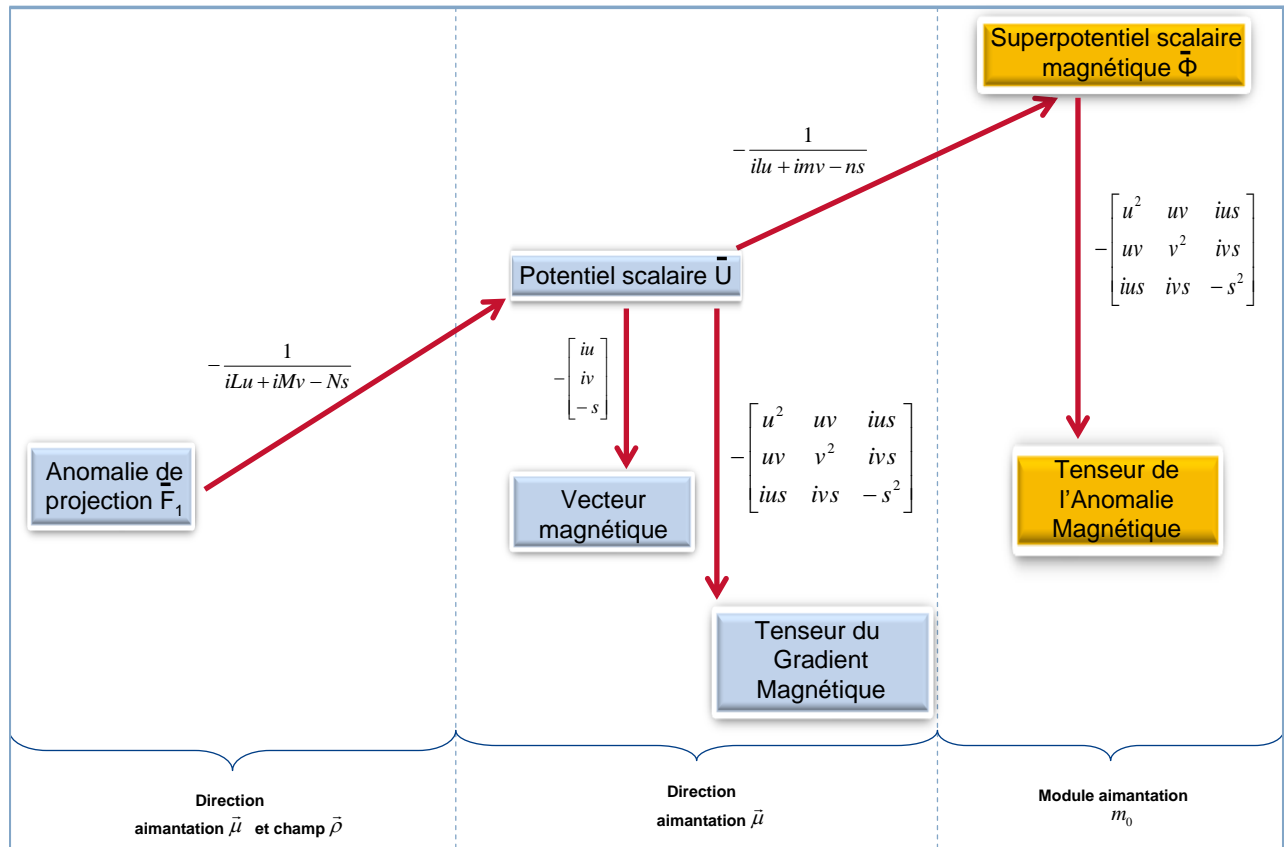


Figure 3.14 : Chaîne de calculs, dans le domaine de Fourier, du tenseur du gradient magnétique et du tenseur de l'anomalie magnétique. Les deux tenseurs ne se situent pas au même niveau de dérivation.

Nous avons vu que le passage du domaine spatial au domaine spectral se fait selon certaines conditions, parfois contraignantes. En particulier, les calculs des potentiels et superpotentiels ne se font pas sans difficultés de calcul aux faibles inclinaisons. De plus, l'évaluation du superpotentiel nécessite une hypothèse classique, mais souvent imparfaite, de supposer les directions d'aimantation connues. On les considère le plus souvent induites par le champ extérieur.

A ces deux restrictions près, c'est en pratique dans le domaine de Fourier que le magnéticien met en œuvre les opérateurs de traitement de carte. Avant d'aborder cette thématique à la lueur du superpotentiel et de son tenseur dérivé, nous généralisons notre étude du dipôle aux sources étendues puis aux corps quelconques au chapitre suivant.

Chapitre IV

PRISME MAGNÉTIQUE ET SOURCES QUELCONQUES

4.1	ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPATIAL À TROIS DIMENSIONS.....	124
4.1.1	<i>Source prismatique.....</i>	124
4.1.1.1	<i>Définition analytique de la source prismatique</i>	125
4.1.1.2	<i>Aimantation d'une source en volume</i>	125
4.1.1.3	<i>Potentiel scalaire magnétique d'un prisme.....</i>	128
4.1.1.4	<i>Champ magnétique.....</i>	128
4.1.1.5	<i>Anomalies magnétiques.....</i>	129
4.1.1.6	<i>Superpotentiel magnétique</i>	133
4.1.2	<i>Source quelconque et direction de l'aimantation uniforme</i>	134
4.1.2.1	<i>Relations croisées entre superpotentiels et potentiels magnétiques</i>	135
4.1.2.2	<i>Relation entre le superpotentiel magnétique et le potentiel gravimétrique</i>	136
4.1.2.3	<i>Relation entre le tenseur de l'anomalie magnétique et le tenseur du gradient gravimétrique</i>	136
4.1.2.4	<i>Relation entre le tenseur du gradient magnétique et les dérivées du tenseur du gradient gravimétrique.....</i>	137
4.1.3	<i>Source quelconque et direction du moment magnétique variable</i>	139
4.1.3.1	<i>Relations croisées entre superpotentiels et potentiels magnétiques</i>	139
4.1.3.2	<i>Vue synoptique des fonctions magnétiques</i>	141
4.2	ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPECTRAL À TROIS DIMENSIONS.....	141
4.2.1	<i>Expression de l'anomalie magnétique comme un produit de fonctions.....</i>	142
4.2.2	<i>Potentiel et superpotentiel magnétiques</i>	143
4.2.3	<i>Équations de Poisson</i>	143
4.2.3.1	<i>Anomalie de projection</i>	143
4.2.3.2	<i>Potentiel d'anomalie magnétique.....</i>	144
4.2.3.3	<i>Superpotentiel d'anomalie magnétique.....</i>	144
4.3	ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPECTRAL À DEUX DIMENSIONS.....	144
4.3.1	<i>Expression analytique de la fonction de localisation de la source prismatique</i>	145
4.3.2	<i>Expression de l'anomalie magnétique dipolaire.....</i>	145
4.3.3	<i>Potentiel magnétique.....</i>	146
4.3.4	<i>Superpotentiel magnétique</i>	147
4.3.5	<i>Bilan - Discussion</i>	147
4.4	BILAN ET CONCLUSIONS.....	148

“ Le fluide [magnétique] contient une vertu particulière. Elle se laisse enfermer dans des objets [...]. [Bouvard et Pécuchet] adoptèrent pour leurs pratiques des jetons magnétisés, des mouchoirs magnétisés, de l'eau magnétisée, du pain magnétisé.”

Gustave Flaubert

Bouvard et Pécuchet, Chapitre huitième, 1881

Chapitre IV : PRISME MAGNÉTIQUE ET SOURCES QUELCONQUES

Ce chapitre constitue la synthèse des deux chapitres précédents. Les résultats précédemment obtenus pour une anomalie dipolaire sont généralisés aux anomalies prismatiques, dans un premier temps, puis aux anomalies quelconques, dans un second temps. Les fonctions magnétiques sont construites selon le même ordre logique qu'au **chapitre II** : potentiels, champ, anomalie puis superpotentiels.

L'étude est menée dans le domaine spatial puis dans l'espace des fréquences. Les fonctions magnétiques seront illustrées par leurs représentations graphiques obtenues par des simulations numériques menées sous *Matlab*. La projection horizontale du prisme est indiquée sur toutes les figures par un rectangle noir.

4.1 ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPATIAL À TROIS DIMENSIONS

4.1.1 Source prismatique

Pour calculer les diverses fonctions magnétiques caractéristiques d'une source prismatique, il suffit de remplacer la fonction de Dirac, caractéristique de la géométrie dipolaire, par une fonction porte 3D représentant l'extension spatiale du prisme. Ceci est détaillé au **paragraphe 4.1.1.1**. Cependant, la signature magnétique d'un prisme est un peu plus complexe que celle d'un dipôle. Nous exposerons les précautions à prendre au **paragraphe 4.1.1.2**.

Dans cette section, les calculs des fonctions magnétiques sont menés partout dans l'espace sauf dans la source. Cependant, le résultat des simulations numériques implémentées sur *Matlab* sera ramené sur le plan horizontal des mesures défini au début du **chapitre II** et à la **figure 2.2**. Ce plan sera observé depuis les $Z < 0$ pour faire correspondre la représentation graphique aux mesures réellement acquises sur le terrain.

Comme au **chapitre II**, nous travaillerons sur une grille de 100 unités de coté, de pas 0.2 et centrée sur l'origine d'un repère terrestre. Le centre du prisme sera situé à 15 unités de profondeur en $(0,0,15)$ et s'étendra du Sud au Nord de $x = -15$ à $x = 15$ et d'Ouest en Est de $y = -10$ à $y = 10$.

Pour accélérer le temps de calcul, nous considérerons le prisme infiniment fin. Nous supposons que le champ de référence $R = 50000$ nT engendre sur le prisme un moment magnétique purement induit d'inclinaison 60° , de déclinaison 15° et d'intensité $\tilde{m}_0 = 1.10^2$ nT.m³.

Pour une meilleure analyse des représentations graphiques, nous envisageons aussi le prisme à l'équateur magnétique ($I = 0^\circ$) et au pôle magnétique ($I = 90^\circ$).

Enfin, comme pour les graphes du **chapitre II**, beaucoup sont accompagnés d'un titre indiquant dans le premier groupe de parenthèses l'inclinaison et la déclinaison en degrés du moment magnétique du prisme et dans le second groupe de parenthèses la moyenne et l'écart type en nT de la fonction représentée.

4.1.1.1 Définition analytique de la source prismatique

On considère un prisme droit s'étendant dans la direction x de x_1 à x_2 , dans la direction y de y_1 à y_2 et dans la direction z de z_1 à z_2 infiniment proches. L'expression analytique de la source prismatique est exprimée par la fonction S_p qui s'écrit

$$s_p(x, y, z) = P(x - x_1, y - y_1, z - z_1) - P(x - x_2, y - y_2, z - z_2), \quad (\text{Eq-4.1})$$

où $P(x, y, z)$ est la fonction de Heaviside définie par $P(x, y, z) = P(x)P(y)P(z)$ et $s_p(x, y, z)$ est alors une fonction porte 3D.

De façon plus concise, en posant $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, la fonction porte s'écrit aussi

$$s_p(\vec{r}) = P(\vec{r} - \vec{r}_1) - P(\vec{r} - \vec{r}_2). \quad (\text{Eq-4.2})$$

4.1.1.2 Aimantation d'une source en volume

Un prisme magnétique, ainsi que toutes sources aimantées en volume, peuvent être décrits comme une distribution de dipôles magnétiques qui sont soit permanents, soit induits par le champ magnétique ambiant. L'ensemble des moments magnétiques crée une aimantation à l'échelle macroscopique.

Par exemple, un matériau ferromagnétique possède une aimantation rémanente intrinsèque \vec{M}_r et une aimantation induite \vec{M}_i . La somme de ces deux aimantations crée alors un champ magnétique mesurable partout dans l'espace. Ces deux aimantations sont de nature différente, la première engendre un champ magnétique d'origine interne \vec{H}_{int} partout dans l'espace. Cette excitation magnétique interne se superpose aux excitations d'origine externe \vec{H}_{ext} (le champ de la Terre, en l'occurrence) qui est à l'origine de l'aimantation induite. Ces différentes contributions créent une induction magnétique

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H}_{\text{int}} + \vec{H}_{\text{ext}} + \vec{M}_i + \vec{M}_r), \quad (\text{Eq-4.3})$$

avec \vec{B} : l'induction magnétique totale mesurée sur le terrain (en T),

\vec{H}_{ext} : le vecteur champ magnétique (ou excitation) d'origine externe (en A.m⁻¹),

\vec{H}_{int} : le vecteur champ magnétique (ou excitation) d'origine interne (en A.m⁻¹),

\vec{M}_i : le vecteur densité d'aimantation induite du milieu (en A.m⁻¹),

\vec{M}_r : le vecteur densité d'aimantation rémanente du milieu (en A.m⁻¹).

Le rapport Q entre ces deux densités d'aimantation est appelé le rapport de Koenigsberger

$$Q = \frac{|\vec{M}_r|}{|\vec{M}_i|}. \quad (\text{Eq-4.4})$$

Le vecteur densité d'aimantation totale \vec{M}_0 est défini par $\vec{M}_0 = \vec{M}_i + \vec{M}_r$.

Le vecteur champ magnétique total \vec{H} est défini par $\vec{H} = \vec{H}_{\text{int}} + \vec{H}_{\text{ext}}$.

Cette relation entre le champ magnétique \vec{H} et l'aimantation induite est telle que $\vec{M}_i = \vec{M}_i(\vec{H})$. Par exemple, pour certains matériaux aimantés ces deux grandeurs sont proportionnelles. La constante de proportionnalité, sans dimension, est la susceptibilité magnétique χ introduite au **chapitre I** telle que

$$\vec{M}_i = \chi \vec{H}. \quad (\text{Eq-4.5})$$

On en déduit dans ce cas particulier de l'équation 4.3

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_r = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_r, \quad (\text{Eq-4.6})$$

avec $\mu_r = 1 + \chi$, la perméabilité magnétique relative du milieu.

Quand le matériau est anisotrope, la susceptibilité prend une forme tensorielle, les vecteurs champ et aimantation ne sont plus colinéaires. En effet, la géométrie des lignes de champ impose un champ magnétique interne opposé au champ magnétique externe au matériau. Ce champ, dit démagnétisant, s'oppose au champ inducteur, le modifiant et pouvant entraîner une désaimantation du matériau.

Notons que pour un matériau paramagnétique, seule \vec{H}_{ext} est source d'aimantation induite. Comme $\vec{M}_r = \vec{0}$, la relation 4.3 s'écrit dans ce cas plus simplement

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}_i), \quad (\text{Eq-4.7})$$

c'est-à-dire

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_m \vec{H}, \quad (\text{Eq-4.8})$$

avec μ_m la perméabilité magnétique du milieu, proche de μ_0 pour les matériaux paramagnétiques.

Il est intéressant pour la suite de relier le vecteur densité d'aimantation \vec{M}_0 au moment dipolaire magnétique \vec{m}_0 constituant l'objet magnétique de volume Ω

$$\vec{m}_0 = \iiint_{\Omega} \vec{M}_0 d\tau. \quad (\text{Eq-4.9})$$

On peut alors définir les trois coordonnées de $\vec{M}(M_x, M_y, M_z)$ telles que

$$M_x = lM_0, \quad M_y = mM_0 \text{ et } M_z = nM_0. \quad (\text{Eq-4.10})$$

Il est nécessaire de se rappeler pour la suite que l'on peut écrire $\vec{M} = M_0 \vec{\mu}$. On définit de façon similaire à l'équation 2.14

$$\tilde{M}_0 = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi}, \text{ avec } \tilde{M}_0 \text{ exprimé en } T. \quad (\text{Eq-4.11})$$

Dans les quatre paragraphes suivants, nous considérons un prisme de densité d'aimantation uniforme dans tout l'espace. Nous allons établir ses fonctions magnétiques caractéristiques en généralisant celles obtenues pour le dipôle magnétique au **chapitre II**.

4.1.1.3 Potentiel scalaire magnétique d'un prisme

Le potentiel magnétique scalaire créé par un dipôle situé à l'origine du repère, calculé en $\vec{r} = (x, y, z)$ est donné par l'équation 2.17

$$U = -\tilde{m}_0 \delta * \nabla_{\mu} \frac{1}{r}.$$

On en déduit le potentiel magnétique créé par le prisme droit

$$U = -\tilde{m}_0 s_p * \nabla_{\mu} \frac{1}{r}. \quad (\text{Eq-4.12})$$

Soit de façon plus explicite

$$U(\vec{r}) = -\tilde{m}_0 \iiint_{\Omega} s_p(\vec{r}') \nabla_{\mu} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau(\vec{r}'),$$

avec $s_p(\vec{r})$ l'expression analytique de la source prismatique, fonction à support borné pour s'assurer que le produit de convolution ait bien un sens.

Nous représentons ce potentiel sur la **figure 4.1** pour différentes combinaisons d'angle.

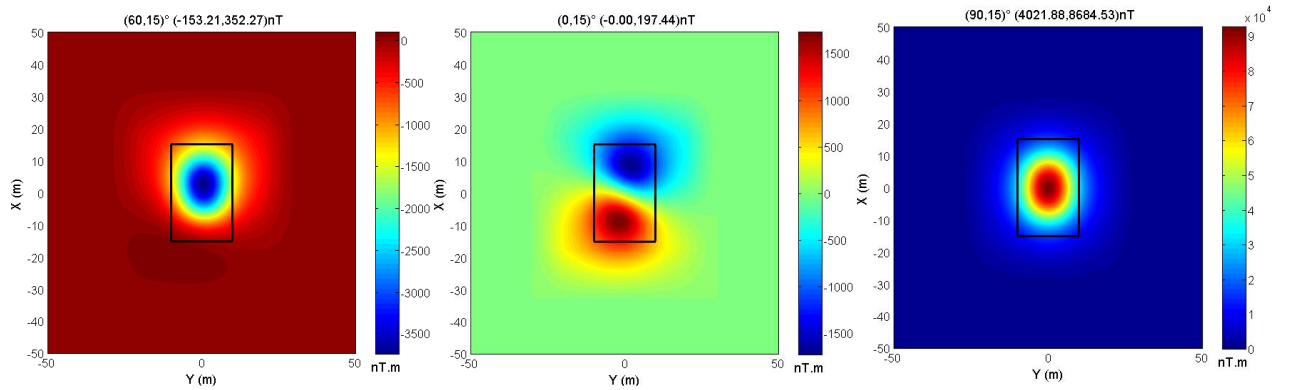


Figure 4.1 : Potentiel d'anomalie magnétique créé par un prisme pour différentes inclinaisons.

Nous remarquons que la moyenne du potentiel d'anomalie est nulle pour une inclinaison nulle et maximale pour une inclinaison de 90°.

4.1.1.4 Champ magnétique

L'expression du champ d'anomalie se déduit du potentiel magnétique scalaire

$$\vec{C} = -\tilde{m}_0 s_p * \vec{\nabla} \left(\nabla_{\mu} \frac{1}{r} \right), \quad (\text{Eq-4.13})$$

soit de façon plus explicite

$$\vec{C}(\vec{r}) = -\tilde{m}_0 \iiint_{\Omega} s_p(\vec{r}') \vec{\nabla} \left(\nabla_{\mu} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) d\tau(\vec{r}').$$

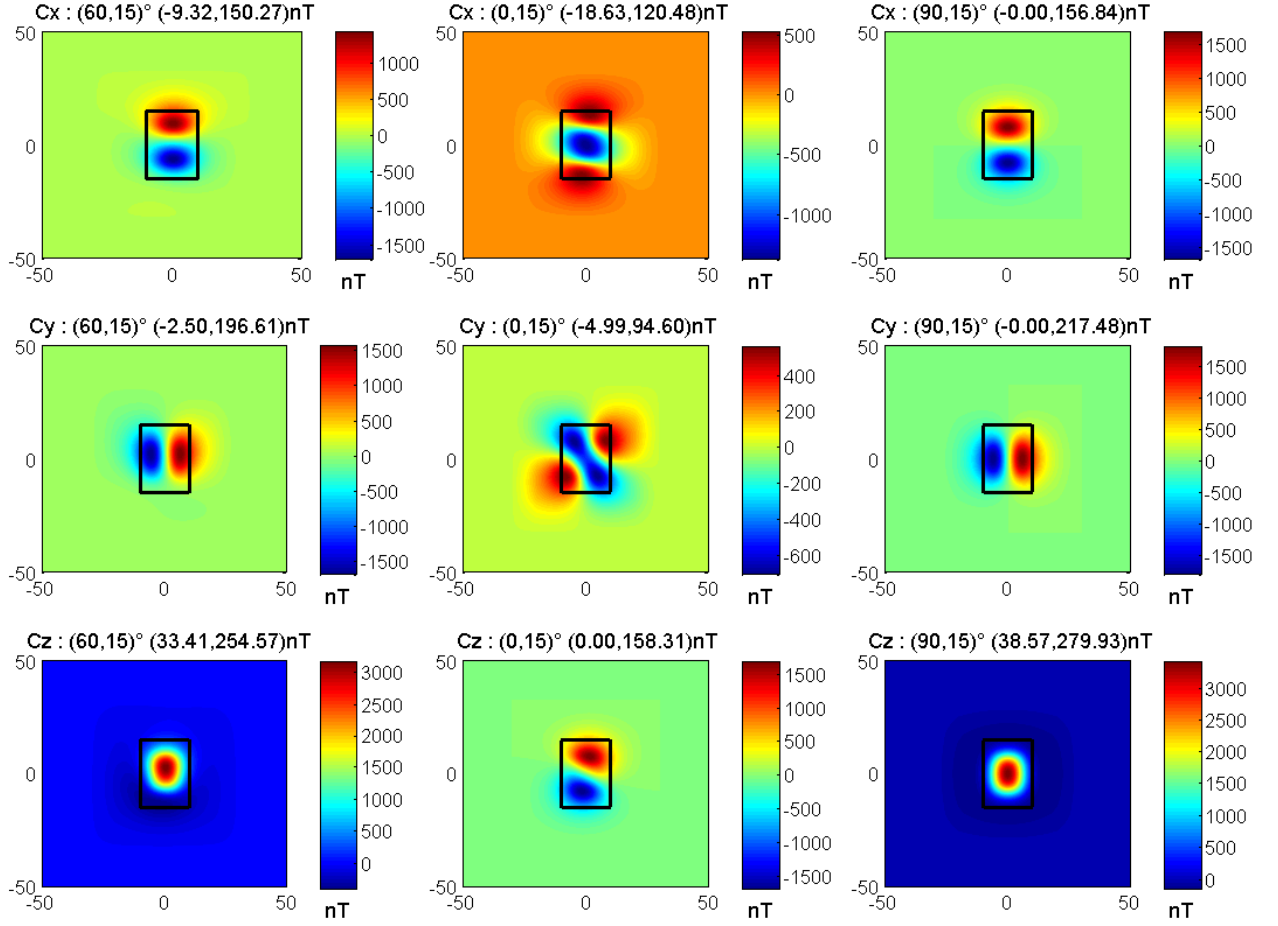


Figure 4.2 : Composantes du champ d'anomalie dipolaire pour différentes inclinaisons et déclinaisons.

4.1.1.5 Anomalies magnétiques

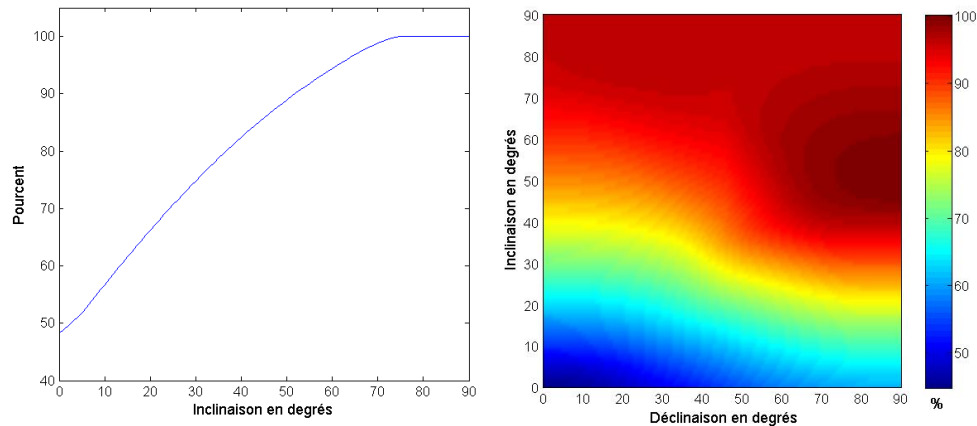
4.1.1.5.1 AICM

L'expression générale de l'AICM a été obtenue à l'égalité 1.4

$$F = \sqrt{(R_x + C_x)^2 + (R_y + C_y)^2 + (R_z + C_z)^2} - R.$$

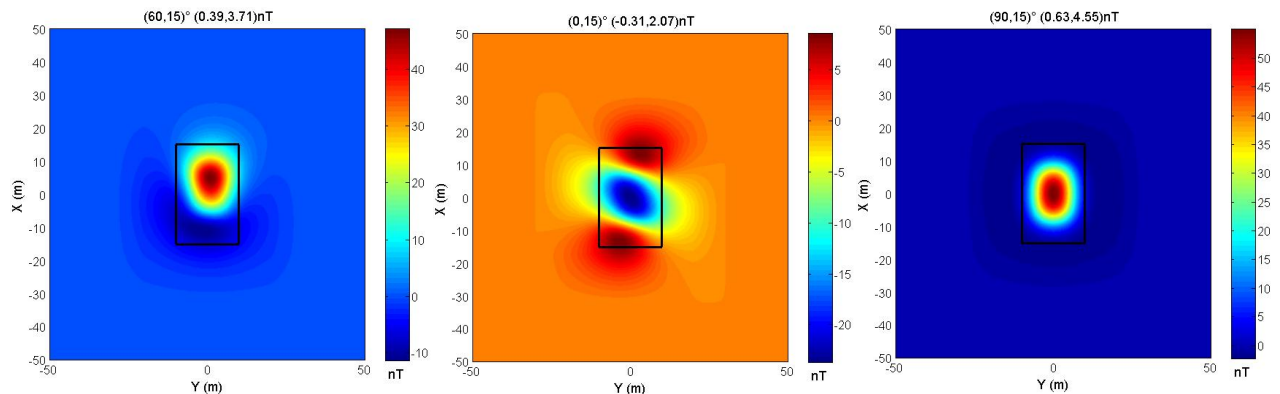
Le champ magnétique créé par le prisme est calculé par l'équation 4.3 et le champ de référence par un modèle global tel que l'IGRF.

Comme pour la source dipolaire au **chapitre II**, il est intéressant d'étudier la variation d'amplitude de l'AICM créée par un prisme, en fonction de l'inclinaison et de la déclinaison. L'amplitude maximale est associée à 100 %. On présente ainsi deux figures donnant l'amplitude de l'AICM en pourcentage, d'abord pour une déclinaison fixée et inclinaison variable, ensuite lorsque les deux angles varient.



Il apparaît sur la figure précédente que l'amplitude ne dépend presque pas de la déclinaison. La valeur minimale de l'amplitude est obtenue à l'équateur ($I = 0^\circ$) et elle est maximale au pôle ($I = 90^\circ$).

Sur la **figure 4.4**, nous traçons l'allure de l'AICM pour différentes valeurs de I et D .



Il est intéressant de remarquer qu'à l'équateur le minimum de l'anomalie est étalé à la verticale de la source tandis qu'au pôle, c'est le maximum de l'anomalie qui est centré à l'aplomb du prisme. Par ailleurs, l'effet de la déclinaison est d'autant plus important sur la forme de l'anomalie que l'inclinaison est faible. Remarquons que l'allure générale de cette AICM est proche de celle créée par un dipôle.

Pour mieux visualiser l'AICM, nous représentons cette fonction dans l'espace. Voici les figures obtenues en explorant différentes valeurs d'inclinaison et de déclinaison du moment magnétique.

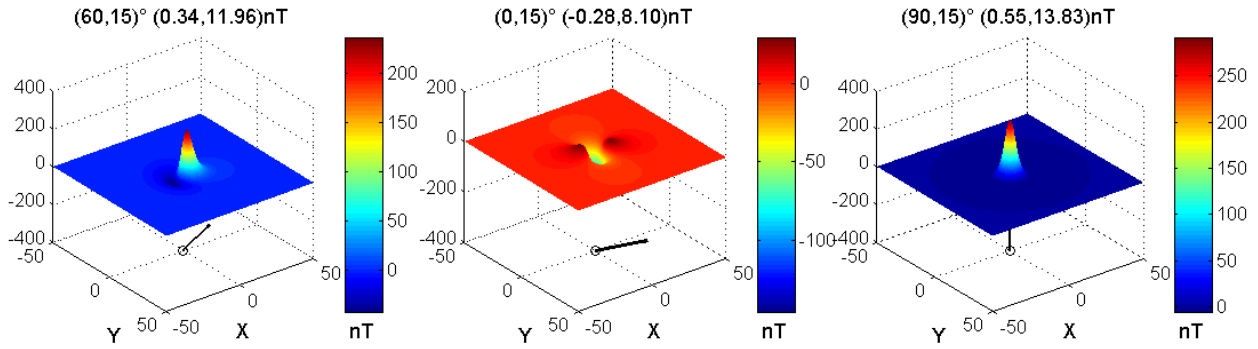


Figure 4.5 : Représentation en 3D de l'AICM créée par des prismes pour différentes inclinaisons et déclinaisons et du moment magnétique associé.

4.1.1.5.2 AICM1

L'anomalie dipolaire de l'intensité du champ magnétique à l'ordre 1 est donnée par l'équation 2.36

$$F_1 = \tilde{m}_0 \delta * \left(\nabla_\rho \nabla_\mu \frac{1}{r} \right).$$

On en déduit l'anomalie magnétique créée par le prisme droit

$$F_1 = \tilde{m}_0 s_p * \left(\nabla_\rho \nabla_\mu \frac{1}{r} \right). \quad (\text{Eq-4.14})$$

4.1.1.5.3 Comparaison entre l'AICM et l'AICM1

Les graphiques des **figures 4.4** et **4.5** ressemblent fortement à ceux de l'AICM1, non représentés ici. Etudions cette ressemblance de façon plus quantitative. On reprend les expressions de l'AICM et de l'AICM1 rappelées aux paragraphes précédents. Pour chacune des trois combinaisons angulaires, on soustrait l'AICM1 à l'AICM créées par le prisme correspondant. Ces différences sont tracées à la **figure 4.6**. Cette première approche semi-quantitative permet déjà d'établir une comparaison entre les deux types d'anomalie.

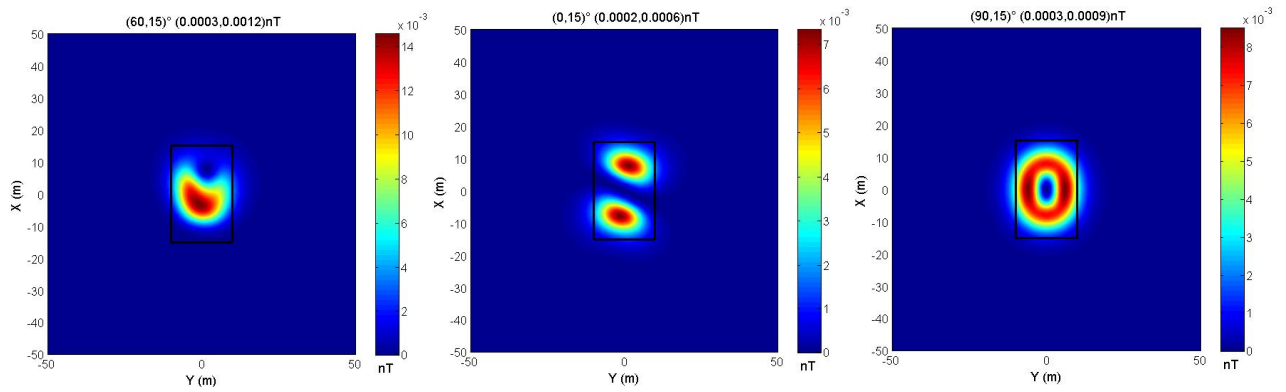


Figure 4.6 : Représentation des différences entre l'AICM et l'AICM1 pour différentes valeurs de D et I.

L'étude graphique de la différence $F - F_1$ permet de confirmer le résultat général de l'équation 1.21. En effet, les trois cartes de différences sont bien positives. Il faut aussi noter que ces différences sont très faibles et sont dans le rapport 10^{-4} avec l'AICM.

Pour affiner cette comparaison, nous appliquons la simulation présentée au **paragraphe 2.2.4** permettant d'explorer une gamme plus large d'amplitudes d'anomalie et de directions d'aimantation. Les résultats obtenus sont regroupés sur la **figure 4.7**.

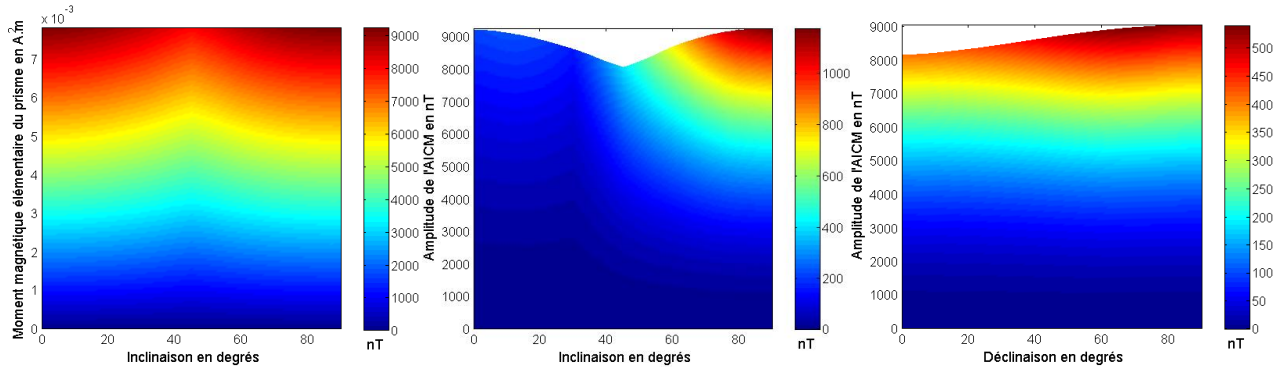


Figure 4.7 : Représentation de l'amplitude de l'AICM pour des moments magnétiques et inclinaisons variables (à gauche) ainsi que des différences maximales entre l'AICM et l'AICM1 pour des inclinaisons et intensités variables (au milieu) puis pour des déclinaisons et intensités variables (à droite).

Sur le premier graphe de *gauche* de la **figure 4.7**, nous faisons varier le moment élémentaire du prisme de 0 à 0.007 A.m^2 et calculons l'amplitude de l'anomalie pour chaque valeur d'inclinaison allant de 0 à 90° .

Sur le graphe du *milieu*, nous en déduisons le maximum des différences entre les deux anomalies en fonction de l'inclinaison et de l'amplitude de l'AICM ; il est atteint pour 90° d'inclinaison. Ce maximum peut atteindre environ 1100 nT pour une anomalie mesurée de 9000 nT d'amplitude, soit une erreur de 12 %. Les différences moyennes réduisent l'erreur de moitié environ.

Sur le graphe de *droite*, nous calculons de la même façon le maximum des différences entre les deux anomalies en fonction de la déclinaison, l'écart entre l'AICM et l'AICM1 est divisé par deux et atteint environ 6 % pour une direction d'aimantation verticale.

Il apparaît donc nécessaire de diminuer cet écart en utilisant la relation **1.20** donnant une estimation de l'anomalie de projection à partir de l'anomalie du champ total.

4.1.1.5.4 Diminution de l'écart entre l'AICM et l'AICM1

La simulation appliquée pour le dipôle au **paragraphe 3.2.6.2.1.2** est transposée pour le prisme. Nous calculons d'une part l'AICM1 grâce à la relation **1.20** puis l'AICM1 vraie engendrée par le prisme. Les différences obtenues entre ces deux fonctions sont reportées à la **figure 4.8**.

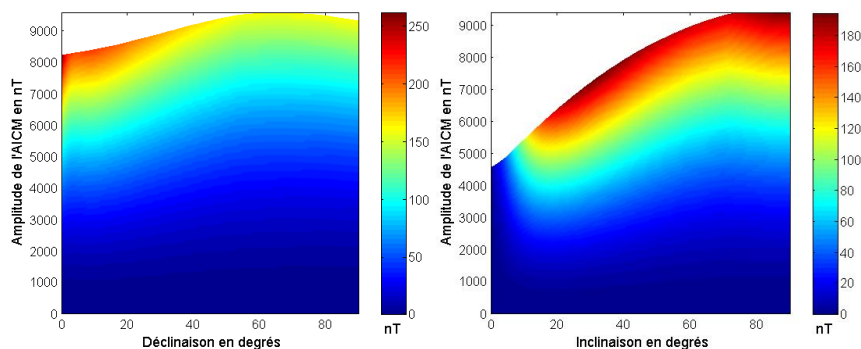


Figure 4.8 : Représentations des différences maximales entre l'AICM1 estimée et l'AICM1 donnée par le modèle pour des inclinaisons et intensités variables (à gauche) et pour des déclinaisons et intensités variables (à droite).

L'amplitude des anomalies n'a pas été modifiée par rapport au paragraphe précédent. Sur les deux graphes, les différences maximales sont divisées respectivement par 4 et 3 par rapport à celles du paragraphe précédent. Ces différences se déplacent vers les angles faibles. Cela est dû à l'intégration de l'anomalie dans le domaine de Fourier qui s'accommode mal des faibles inclinaisons.

4.1.1.6 Superpotentiel magnétique

Le superpotentiel magnétique scalaire créé par un dipôle centré sur l'origine, calculé en $\vec{r} = (x, y, z)$ est donné par l'équation **2.51**

$$\Phi = \tilde{m}_0 \delta * \frac{1}{r}.$$

On en déduit le superpotentiel magnétique créé par un prisme droit que l'on représente ensuite sur la **figure 4.9**

$$\Phi = \tilde{m}_0 s_p * \frac{1}{r}. \quad (\text{Eq-4.15})$$

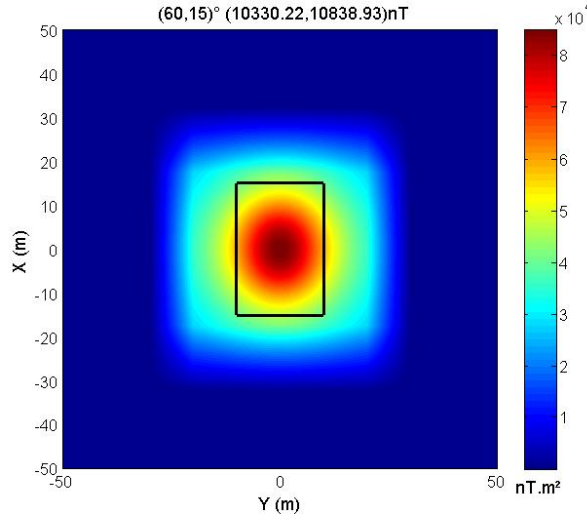


Figure 4.9 : Représentation du superpotentiel.

On retrouve bien la symétrie parfaite de la fonction centrée à l'aplomb du prisme.

4.1.2 Source quelconque et direction de l'aimantation uniforme

Pour une source quelconque de moment magnétique uniforme prise sur un volume Ω , il est facile de généraliser les expressions des fonctions anomalie, potentiel et superpotentiel scalaire ou vecteur pour des directions uniformes d'aimantation dans l'espace. Respectivement, ces expressions s'écrivent

$$F_1(\vec{r}) = \iiint_{\Omega} \nabla_{\rho} \nabla_{\mu} \frac{\tilde{M}_0(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau = \tilde{m}_0 \iiint_{\Omega} \nabla_{\rho} \nabla_{\mu} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau, \quad (\text{Eq-4.16})$$

$$U(\vec{r}) = -\iiint_{\Omega} \nabla_{\mu} \frac{\tilde{M}_0(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau = -\tilde{m}_0 \iiint_{\Omega} \nabla_{\mu} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau, \quad (\text{Eq-4.17})$$

$$\bar{\Pi}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{M}_0(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau = \tilde{m}_0 \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau, \quad (\text{Eq-4.18})$$

$$\Phi(\vec{r}) = \iiint_{\Omega} \frac{\tilde{M}_0(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau = \tilde{m}_0 \iiint_{\Omega} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau. \quad (\text{Eq-4.19})$$

Soulignons que les expressions **4.16** et **4.17** sont citées par Baranov (1957), cette dernière était déjà connue sous sa forme moderne à l'époque de Poisson (1781 – 1840). Par ailleurs, l'égalité **4.18** remonte aux travaux de Hertz (1857 – 1894) sur l'électromagnétisme. Enfin, l'expression **4.19** est nouvelle.

4.1.2.1 Relations croisées entre superpotentiels et potentiels magnétiques

Vérifions d'abord que l'égalité **2.59** est généralisable à ces sources quelconques. Calculons la divergence du vecteur $\vec{\Pi}$ exprimé dans l'équation **4.18**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = \tilde{m}_0 \vec{\mu} \cdot \vec{\nabla} \left(\iiint_{\Omega} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) + \left(\tilde{m}_0 \iiint_{\Omega} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{\mu}. \quad (\text{Eq-4.20})$$

Or
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mu} = 0, \quad (\text{Eq-4.21})$$

donc
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = \nabla_{\mu} \left(\tilde{m}_0 \iiint_{\Omega} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) = \nabla_{\mu} \Phi, \quad (\text{Eq-4.22})$$

et de plus
$$\nabla_{\mu} \left(\tilde{m}_0 \iiint_{\Omega} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) = \tilde{m}_0 \iiint_{\Omega} \nabla_{\mu} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau = U. \quad (\text{Eq-4.23})$$

Ainsi les deux fonctions scalaires potentiel et superpotentiel magnétiques sont reliées comme suit

$$U = -\nabla_{\mu} \Phi.$$

Et d'après l'équation **2.30**, vérifiée dans le cas général, nous avons (Munsch & Fleury, 2011)

$$F_1 = \nabla_{\rho} \nabla_{\mu} \Phi.$$

Vérifions ensuite que l'égalité **2.72** est généralisable à ces sources quelconques. Calculons le rotationnel de $\vec{\Pi}$, d'après la relation **2.42**

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\Pi},$$

c'est-à-dire

$$\vec{\nabla} \times \vec{\Pi} = \tilde{m}_0 \vec{\nabla} \times \vec{\mu} \iiint_{\Omega} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau. \quad (\text{Eq-4.24})$$

D'après une relation classique de l'analyse vectorielle

$$\vec{\nabla} \times \vec{\Pi} = \tilde{m}_0 \vec{\nabla} \left(\iiint_{\Omega} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) \times \vec{\mu} - \left(\tilde{m}_0 \iiint_{\Omega} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) \vec{\nabla} \times \vec{\mu}. \quad (\text{Eq-4.25})$$

Or
$$\vec{\nabla} \times \vec{\mu} = \vec{0}, \quad (\text{Eq-4.26})$$

donc
$$\vec{A} = \vec{\nabla} \left(\tilde{m}_0 \iiint_{\Omega} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) \times \vec{\mu}. \quad (\text{Eq-4.27})$$

On retrouve alors l'expression 2.72

$$\vec{A} = -\vec{\mu} \times \vec{\nabla} \Phi.$$

4.1.2.2 Relation entre le superpotentiel magnétique et le potentiel gravimétrique

Afin de mieux appréhender la fonction superpotentiel, une variante de la Relation de Poisson est établie dans la démonstration qui suit. Elle présente le superpotentiel magnétique comme un équivalent mathématique du potentiel gravitationnel. Considérons un corps de masse volumique ρ' et d'aimantation uniforme. Son potentiel gravitationnel W est donné par

$$W(\vec{r}) = G\rho' \iiint_{\Omega} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau. \quad (\text{Eq-4.28})$$

Et son superpotentiel magnétique est donné par l'expression 4.19.

En substituant l'intégrale de l'égalité 4.28 par l'intégrale de l'équation 4.19, on obtient

$$\Phi = \frac{\tilde{m}_0}{G\rho'} W. \quad (\text{Eq-4.29})$$

L'équation 4.29 montre bien le lien général entre le superpotentiel magnétique et le potentiel gravimétrique W . Elle est similaire à la Relation de Poisson mieux connue entre l'anomalie gravimétrique et le potentiel magnétique exposée au **paragraphe 2.1.3**.

4.1.2.3 Relation entre le tenseur de l'anomalie magnétique et le tenseur du gradient gravimétrique

Pedersen et Rasmussen (1990) ont défini le *Tenseur du Gradient Gravimétrique* TGG comme suit

$$\mathbf{TGG} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq-4.30})$$

La relation de Poisson **4.29** permet d'établir les relations entre les composantes du **TGG** et celles du **TAM**. En dérivant deux fois de chaque côté de cette égalité, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\tilde{m}_0}{G\rho'} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad (\text{Eq-4.31})$$

c'est-à-dire

$$\Phi_{xx} = \frac{\tilde{m}_0}{G\rho'} W_{xx}. \quad (\text{Eq-4.32})$$

De façon générale, la relation entre le **TAM** et le **TGG** s'écrit

$$\Phi_{ij} = \frac{\tilde{m}_0}{G\rho'} W_{ij}. \quad (\text{Eq-4.33})$$

Cette relation justifie l'existence du **TAM** et permettra au chapitre suivant de transposer certains outils d'analyse du **TGG** au **TAM**.

4.1.2.4 Relation entre le tenseur du gradient magnétique et les dérivées du tenseur du gradient gravimétrique

Une autre relation intéressante découle de la relation de Poisson **4.29**, elle permet de relier le **TGM** et le **TGG**. En prenant le gradient de la dérivée oblique dans le sens de l'aimantation de chaque côté de cette égalité, nous obtenons

$$\vec{\nabla} \nabla_{\mu} \Phi = \frac{\tilde{m}_0}{G\rho'} \vec{\nabla} \nabla_{\mu} W. \quad (\text{Eq-4.34})$$

Or le champ gravitationnel est directement relié au potentiel par la relation suivante

$$\vec{g} = \vec{\nabla} W. \quad (\text{Eq-4.35})$$

Donc il vient aisément

$$\vec{C} = \frac{\tilde{m}_0}{G\rho'} \nabla_\mu \vec{g}, \quad (\text{Eq-4.36})$$

que l'on peut écrire

$$\vec{C} = \frac{\tilde{m}_0}{G\rho'} \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{g}. \quad (\text{Eq-4.37})$$

Dérivons par rapport à x la première composante du champ magnétique. Nous obtenons au signe près la première composante diagonale du **TGM**

$$U_{xx} = -\frac{\tilde{m}_0}{G\rho'} \nabla_\mu \frac{\partial}{\partial x} g_x, \quad (\text{Eq-4.38})$$

que l'on note

$$U_{xx} = \frac{\tilde{m}_0}{G\rho'} \nabla_\mu W_{xx}. \quad (\text{Eq-4.39})$$

De façon générale, la relation entre le **TGM** et la dérivée du **TGG** s'écrit

$$\boxed{U_{ij} = \frac{\tilde{m}_0}{G\rho'} \nabla_\mu W_{ij}.} \quad (\text{Eq-4.40})$$

Les relations **4.33** et **4.40** montrent les liens étroits qui se tissent entre ces deux tenseurs. Elles seront utiles au **chapitre V** pour déduire des résultats nouveaux sur le **TAM** à partir de propriétés connues du **TGG**.

Dans la conclusion de ce chapitre, nous récapitulerons à la **figure 4.14** les liens mathématiques qui existent entre chacune des grandeurs magnétiques et gravimétriques.

Cependant, l'application de ces relations de Poisson est assez limitée puisque celles-ci nécessitent des masses volumiques et des densités uniformes. Remarquons qu'en dehors de ce domaine restreint, l'utilisation distincte de chacun de ces deux tenseurs trouve toute sa pertinence.

4.1.3 Source quelconque et direction du moment magnétique variable

On considère à présent, une source quelconque d'aimantation de direction non uniforme. On suppose que l'ensemble peut être subdivisé en sous domaines de densité d'aimantation \vec{M}_i de directions uniformes. Ceci peut être schématisé sur la **figure 4.10**.

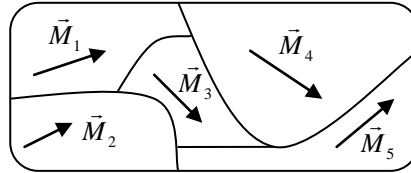


Figure 4.10 : Sous domaine de densité d'aimantation uniforme.

A l'extérieur des sources, on peut facilement établir les expressions des fonctions anomalie, potentiel et superpotentiels scalaire et vecteur. Respectivement, ces expressions s'écrivent

$$F_1(\vec{r}) = \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{\nabla} \iiint_{\Omega_i} \nabla_{\rho} \frac{\tilde{M}_i(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau, \quad (\text{Eq-4.41})$$

$$U(\vec{r}) = \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{\nabla} \iiint_{\Omega_i} \frac{\tilde{M}_i(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau, \quad (\text{Eq-4.42})$$

$$\bar{\Pi}(\vec{r}) = \sum_i \vec{\mu}_i \iiint_{\Omega_i} \frac{\tilde{M}_i(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau, \quad (\text{Eq-4.43})$$

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \bar{\Pi}_i = \sum_i \iiint_{\Omega_i} \frac{\tilde{M}_i(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau. \quad (\text{Eq-4.44})$$

4.1.3.1 Relations croisées entre superpotentiels et potentiels magnétiques

Vérifions d'abord que les équations 2.66 et 2.73 sont généralisables à cette source quelconque. Le superpotentiel de chaque domaine s'exprime ainsi

$$\bar{\Pi}_i(\vec{r}) = \vec{\mu}_i \iiint_{\Omega_i} \frac{\tilde{M}_i(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau, \quad (\text{Eq-4.45})$$

or

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\Pi}_i = \vec{\mu}_i \cdot \vec{\nabla} \left(\iiint_{\Omega_i} \frac{\tilde{M}_i(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) + \left(\iiint_{\Omega_i} \frac{\tilde{M}_i(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{\mu}_i \quad (\text{Eq-4.46})$$

et

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mu}_i = 0,$$

donc

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_i = \vec{\mu}_i \cdot \vec{\nabla} \left(\iiint_{\Omega_i} \frac{\tilde{M}_i(r')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) = \vec{\mu}_i \cdot \vec{\nabla} \Phi_i. \quad (\text{Eq-4.47})$$

On en déduit la divergence du superpotentiel créé par l'ensemble

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{\nabla} \left(\iiint_{\Omega_i} \frac{\tilde{M}_i(r')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) = \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{\nabla} \Phi_i. \quad (\text{Eq-4.48})$$

Ainsi d'après l'équation **2.66**, les deux fonctions scalaires potentiel et superpotentiel magnétiques sont reliées comme suit

$$U = - \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{\nabla} \Phi_i \quad (\text{Eq-4.49})$$

et

$$F_1 = \nabla_\rho \sum_i \vec{\mu}_i \cdot \vec{\nabla} \Phi_i. \quad (\text{Eq-4.50})$$

Vérifions ensuite que l'équation **2.72** est généralisable à cette source quelconque. Calculons le rotationnel de $\vec{\Pi}$ donné par l'équation **4.43**

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\Pi},$$

c'est-à-dire

$$\vec{\nabla} \times \vec{\Pi} = \vec{\nabla} \times \sum_i \vec{\mu}_i \iiint_{\Omega_i} \frac{\tilde{M}_i(r')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau. \quad (\text{Eq-4.51})$$

D'après une relation classique de l'analyse vectorielle

$$\vec{\nabla} \times \vec{\Pi} = \sum_i \vec{\nabla} \left(\iiint_{\Omega_i} \frac{\tilde{M}_i(r')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) \times \vec{\mu}_i - \sum_i \left(\iiint_{\Omega_i} \frac{\tilde{M}_i(r')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) \vec{\nabla} \times \vec{\mu}_i. \quad (\text{Eq-4.52})$$

Or

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mu}_i = \vec{0},$$

donc d'après l'équation **2.42**

$$\vec{A} = \sum_i \vec{\nabla} \left(\iiint_{\Omega_i} \frac{\tilde{M}_i(r')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\tau \right) \times \vec{\mu}_i. \quad (\text{Eq-4.53})$$

Il vient alors

$$\vec{A} = - \sum_i \vec{\mu}_i \times \vec{\nabla} \Phi_i. \quad (\text{Eq-4.54})$$

4.1.3.2 Vue synoptique des fonctions magnétiques

La **figure 4.11** présente une vue synoptique des six fonctions magnétiques caractéristiques que nous venons d'établir pour un corps quelconque. Les superpotentiels sont indiqués pour un sous domaine d'aimantation uniforme. On indique les relations pour obtenir les autres fonctions magnétiques pour le corps entier. En *orange* sont indiqués les nouveaux résultats.

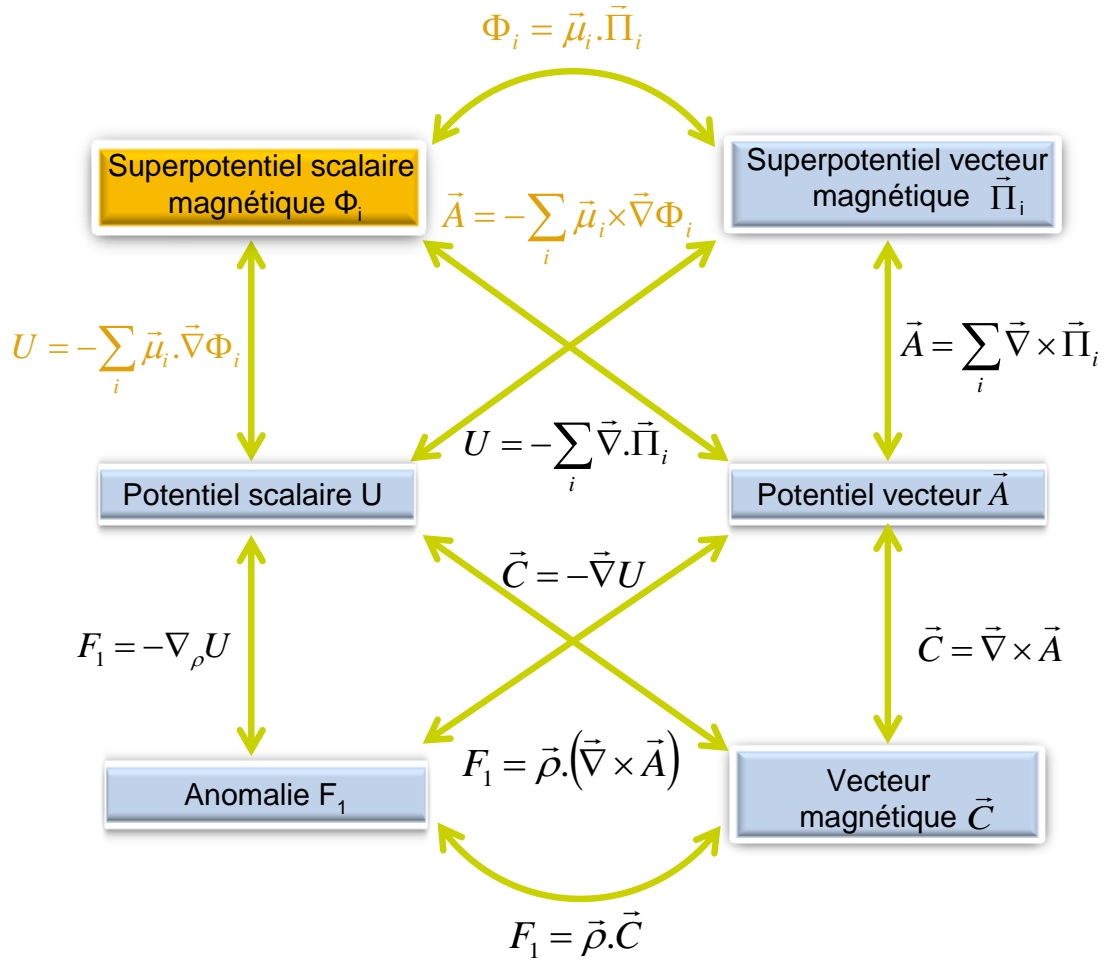


Figure 4.11 : Vue synoptique des six fonctions magnétiques et de leurs relations de passage.

4.2 ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPECTRAL À TROIS DIMENSIONS

Nous reprenons l'étude du prisme droit que nous transposons dans l'espace complet de Fourier. Nous gardons les mêmes notations et définitions des transformées de Fourier 3D exposées au début de la **section 3.1**.

4.2.1 Expression de l'anomalie magnétique comme un produit de fonctions

Nous avons montré dans l'équation 4.14 qu'une anomalie prismatique s'exprime dans le domaine spatial comme un produit de convolution. Pour exprimer F_1 dans le domaine spectral, il suffit de calculer le produit tel que

$$\bar{F}_1(u, v, w) = \tilde{m}_0 A(u, v, w) B(u, v, w), \quad (\text{Eq-4.55})$$

avec $A(u, v, w) = TF(S_p(x, y, z))$ et $B(u, v, w) = TF\left(\nabla_\rho \nabla_\mu \frac{1}{r}\right)$.

Bhattacharyya et Navolio (1976) ont calculé la transformée de Fourier 3D de la fonction porte. Voici ce qu'ils ont obtenu

$$\bar{s}_p(u, v, w) = \frac{i}{uvw} \left(e^{-iux_1} - e^{-iux_2} \right) \left(e^{-ivy_1} - e^{-ivy_2} \right) \left(e^{-iwz_1} - e^{-iwz_2} \right). \quad (\text{Eq-4.56})$$

D'après le résultat de l'équation 3.13, nous savons par ailleurs que

$$TF\left(\nabla_\rho \nabla_\mu \frac{1}{r}\right) = -\frac{4\pi}{u^2 + v^2 + w^2} (Lu + Mv + Nw)(lu + mv + nw).$$

A partir de ces deux transformées de Fourier, il devient aisé d'exprimer toutes les fonctions magnétiques caractéristiques du prisme.

Ainsi, d'après les équations 4.56 et 3.13, on obtient l'expression suivante pour l'anomalie

$$\bar{F}_1(u, v, w) = -\frac{4\tilde{m}_0\pi}{u^2 + v^2 + w^2} (Lu + Mv + Nw)(lu + mv + nw)\bar{s}_p(u, v, w) \quad (\text{Eq-4.57})$$

et dans le cas particulier d'une aimantation induite

$$\boxed{\bar{F}_1(u, v, w) = -\frac{4\tilde{m}_0\pi}{u^2 + v^2 + w^2} (Lu + Mv + Nw)^2 \bar{s}_p(u, v, w).} \quad (\text{Eq-4.58})$$

4.2.2 Potentiel et superpotentiel magnétiques

A partir de l'égalité **4.12**, exprimée dans le domaine spatial, nous appliquons une transformation de Fourier. L'expression de \bar{U} se déduit du produit ordinaire de l'équation **4.56** avec le résultat **3.18**

$$\bar{U}(u, v, w) = -\frac{4i\tilde{m}_0\pi}{u^2 + v^2 + w^2} (lu + mv + nw)\bar{s}_p(u, v, w). \quad (\text{Eq-4.59})$$

On vérifie bien que le potentiel d'anomalie ne comporte que la dérivation oblique dans la direction de l'aimantation.

A partir l'équation **4.15**, le superpotentiel d'anomalie peut être facilement exprimé dans le domaine de Fourier au moyen des résultats **3.9** et **4.56**

$$\bar{\Phi}(u, v, w) = \frac{4\tilde{m}_0\pi}{u^2 + v^2 + w^2} \bar{s}_p(u, v, w). \quad (\text{Eq-4.60})$$

On remarque bien que le superpotentiel ne comporte plus de dérivation.

4.2.3 Équations de Poisson

4.2.3.1 Anomalie de projection

D'après l'étude sur le dipôle magnétique du chapitre précédent, nous avons établi l'équation de Poisson vérifiée par l'anomalie de projection pour une source en (x_0, y_0, z_0)

$$\Delta F_1(x, y, z) = -\mu_0 m_0 \nabla_\rho \nabla_\mu \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Nous en déduisons alors l'équation spatiale de Poisson vérifiée par l'AICM1 pour une source prismatique

$$\Delta F_1(x, y, z) = -\mu_0 m_0 \nabla_\rho \nabla_\mu \bar{s}_p(x, y, z). \quad (\text{Eq-4.61})$$

Ce qui donne dans le domaine spectral

$$-(u^2 + v^2 + w^2)\bar{F}_1(u, v, w) = \mu_0 m_0 (lu + mv + nw)(Lu + Mv + Nw)\bar{s}_p(u, v, w). \quad (\text{Eq-4.62})$$

On peut remarquer que l'on retrouve ainsi l'expression **4.58** de $\bar{F}_1(u, v, w)$.

4.2.3.2 Potentiel d'anomalie magnétique

De la même façon, nous pouvons déduire de l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel d'anomalie dipolaire l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel pour une source prismatique

$$\Delta U(x, y, z) = \mu_0 m_0 \nabla_{\mu} \bar{s}_p(x, y, z). \quad (\text{Eq-4.63})$$

Ce qui donne dans le domaine spectral

$$-(u^2 + v^2 + w^2) \bar{U}(u, v, w) = i \mu_0 m_0 (lu + mv + nw) \bar{s}_p(u, v, w). \quad (\text{Eq-4.64})$$

On retrouve l'expression **4.59** de $\bar{U}(u, v, w)$.

4.2.3.3 Superpotentiel d'anomalie magnétique

Enfin, nous déduisons de l'égalité **2.91**, l'équation de Poisson vérifiée par le superpotentiel d'anomalie créé par une source prismatique

$$\Delta \Phi(x, y, z) = -m_0 \mu_0 s_p(x, y, z). \quad (\text{Eq-4.65})$$

Ce qui donne dans le domaine spectral

$$-(u^2 + v^2 + w^2) \bar{\Phi}(u, v, w) = -m_0 \mu_0 \bar{s}_p(u, v, w). \quad (\text{Eq-4.66})$$

On peut remarquer que l'on retrouve bien l'expression **4.60** de $\bar{\Phi}(u, v, w)$.

4.3 ÉTUDE DANS LE DOMAINE SPECTRAL À DEUX DIMENSIONS

Nous avons vu au chapitre précédent, qu'en prospection géophysique l'étude des sources est généralement suffisante sur le plan horizontal OXY situé à une hauteur h du sol. On rappelle que h est considéré comme négatif puisque l'axe vertical z est orienté vers le bas.

Nous allons donc réécrire toutes les expressions caractéristiques du prisme magnétique dans le plan 2D de Fourier. Nous conservons les notations et définitions des transformées de Fourier 2D énoncées au début de la section **3.2**.

4.3.1 Expression analytique de la fonction de localisation de la source prismatique

En 2D, l'expression analytique de $S_p(x, y, z)$ se réduit dans le plan OXY à

$$S_p(x, y, h) = P(x - x_1, y - y_1, h - z_1) - P(x - x_2, y - y_2, h - z_2). \quad (\text{Eq-4.67})$$

Bhattacharyya et Navolio (1976) ont calculé la transformée de Fourier 2D de la fonction porte. Voici ce qu'ils ont obtenu

$$\bar{S}_p(u, v) = -\frac{1}{uv\sqrt{u^2 + v^2}} \left(e^{-iux_1} - e^{-iux_2} \right) \left(e^{-ivx_1} - e^{-ivx_2} \right) \left(e^{-\sqrt{u^2 + v^2}z_1} - e^{-\sqrt{u^2 + v^2}z_2} \right). \quad (\text{Eq-4.68})$$

4.3.2 Expression de l'anomalie magnétique dipolaire

D'après l'équation 4.14, l'AICM1 dans le domaine spatial s'écrit

$$F_1(\vec{r}) = \tilde{m}_0 \iiint_{\Omega} S_p(\vec{r}') \nabla_{\rho} \nabla_{\mu} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau(\vec{r}'). \quad (\text{Eq-4.69})$$

Soit en séparant les variables

$$F_1(\vec{r}) = \tilde{m}_0 \int_{z_1}^{z_2} dz' \iint_{\mathbb{R}^2} S_{p,h}(x', y') \nabla_{\rho} \nabla_{\mu} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dx' dy', \quad (\text{Eq-4.70})$$

avec $S_{p,z'}(x', y')$, l'intersection de $S_p(x', y', z')$ avec le plan $z' = \text{constante}$.

En termes de produit de convolution, l'expression précédente peut s'écrire

$$F_1(\vec{r}) = \tilde{m}_0 \int_{z_1}^{z_2} S_{p,z'} * \left(\nabla_{\rho} \nabla_{\mu} \frac{1}{r} \right) dz'. \quad (\text{Eq-4.71})$$

Le passage dans le domaine de Fourier donne

$$\bar{F}_1(u, v) = \tilde{m}_0 \int_{z_1}^{z_2} \bar{S}_{p,z'} TF \left(\nabla_{\rho} \nabla_{\mu} \frac{1}{r} \right) dz'. \quad (\text{Eq-4.72})$$

D'après les résultats obtenus au chapitre précédent, on obtient, après intégration par rapport à z' , l'expression suivante pour l'anomalie, en posant $h = z_2 - z_1$

$$\bar{F}_1(u, v, h) = \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} \left(iLu + iMv - N\sqrt{u^2+v^2} \right) \left(ilu + imv - n\sqrt{u^2+v^2} \right) \bar{S}_p(u, v).$$

Si l'aimantation du prisme est induite par le champ magnétique extérieur, elle devient

$$\bar{F}_1(u, v, h) = \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} \left(iLu + iMv - N\sqrt{u^2+v^2} \right)^2 \bar{S}_p(u, v). \quad (\text{Eq-4.73})$$

4.3.3 Potentiel magnétique

Le potentiel d'anomalie ne comporte que la dérivation oblique dans la direction de l'aimantation

$$\bar{U}(u, v, h) = -\tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} \left(ilu + imv - n\sqrt{u^2+v^2} \right) \bar{S}_p(u, v). \quad (\text{Eq-4.74})$$

Nous représentons ce potentiel sur la **figure 4.12** calculé en condition de « terrain », c'est-à-dire au moyen d'une intégration oblique de l'anomalie de projection.

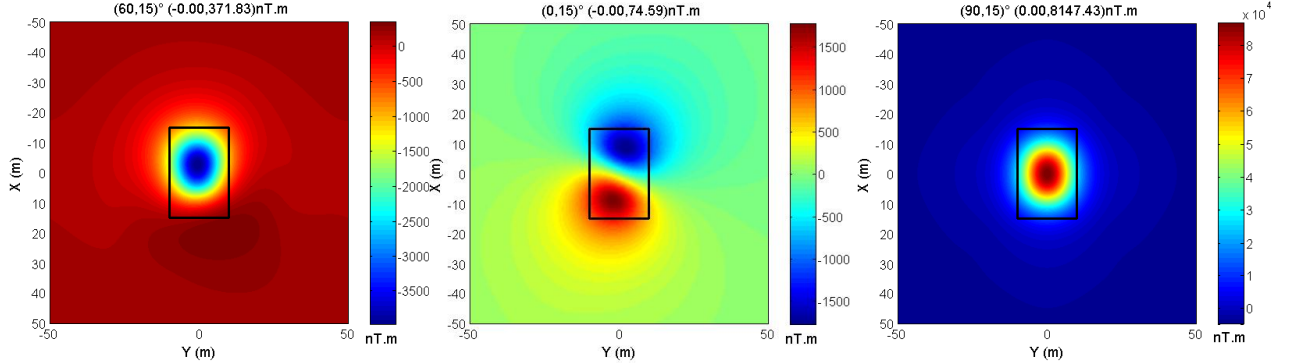


Figure 4.12 : Potentiel d'anomalie magnétique créé par un prisme pour différentes inclinaisons.

Nous remarquons une fois de plus que le calcul de Fourier annule les moyennes des fonctions calculées et pose toujours quelques problèmes pour les faibles inclinaisons. Nous avons outrepassé ce problème en élargissant la grille de calcul à un carré de 400 unités de côtés (pas de 1).

4.3.4 Superpotentiel magnétique

L'expression du superpotentiel dans le domaine spectral est donc

$$\overline{\Phi}(u, v, h) = \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h|\sqrt{u^2+v^2}}}{\sqrt{u^2+v^2}} \overline{S}_p(u, v). \quad (\text{Eq-4.75})$$

Dans la simulation numérique qui suit, le calcul du superpotentiel est mené par double intégration dans le domaine spectral au moyen de la relation 3.61.

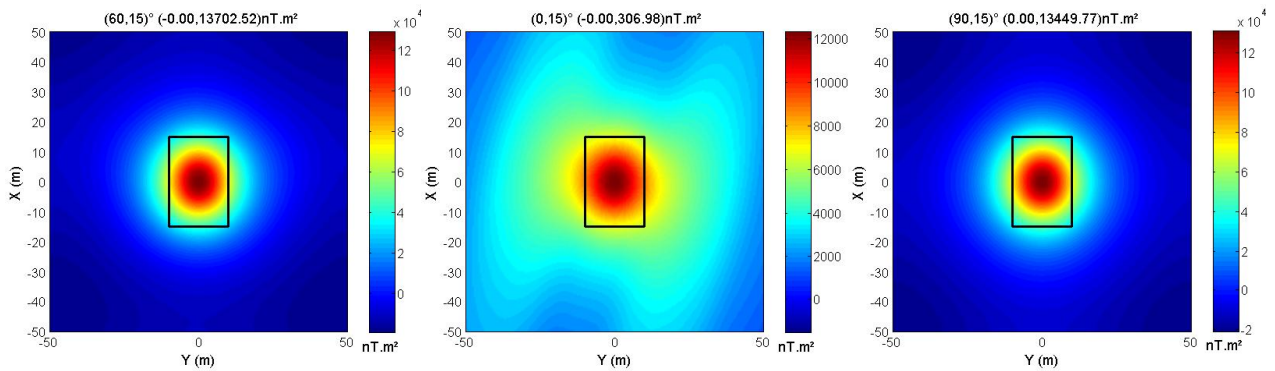


Figure 4.13 : Superpotentiel d'anomalie magnétique créé par un prisme pour différentes inclinaisons.

Partant des trois anomalies de projection de caractéristiques angulaires différentes, les trois superpotentiels devraient être identiques et centrés à l'aplomb du prisme. Seul le calcul à inclinaison nulle ne vérifie pas tout à fait cette assertion. Pour obtenir ce résultat, il a fallu élargir la grille de calcul à 800 unités de côtés (pas de 1). Une grille de calcul infiniment grande permettrait de résoudre ce problème.

4.3.5 Bilan - Discussion

Il faut retenir que les difficultés d'intégration spectrale à inclinaisons sub-nulles peuvent être levées si le calcul est mené sur un plan infini, contenant toute l'anomalie. Cela peut être expliqué géométriquement en étudiant la distribution des lignes de champ magnétique de la source. Par exemple, pour un dipôle, comme le montre la **figure 2.7** :

- aux fortes inclinaisons, elles sont sub-perpendiculaires au plan de mesure, apparaissant denses et resserrées à l'aplomb de l'objet. Une carte d'anomalies limitée autour de l'objet suffit pour avoir assez d'information sur la source ;

- aux faibles inclinaisons, elles sont sub-parallèles au plan de mesure, apparaissant étalées et dispersées loin de l'aplomb de l'objet. Une carte d'anomalies limitée autour de l'objet ne suffit pas pour bien connaître la source.

Ces problèmes d'intégration dans le domaine spectral abordent en toile de fond des considérations à la fois théoriques et pratiques en prospection magnétique :

- la difficulté de réduire au pôle des données proches de l'équateur magnétique ; comme nous le rappellerons au **chapitre VI**, cet opérateur nécessite une double intégration spectrale. Cette étude montre qu'il n'y a pas d'impossibilité physique de réduire au pôle des données équatoriales mais le problème est uniquement dû à des instabilités numériques de calcul. Nous reviendrons sur ce point au **chapitre VI**.
- la stratégie de prospection est un élément clé pour limiter le problème. En effet, il est impossible de prospecter sur un plan infini mais un choix pertinent portant sur la superficie du levé, l'altitude et l'espacement des lignes du vol permettra de lever quelques difficultés.

4.4 BILAN ET CONCLUSIONS

Les développements précédents ont permis de généraliser les **chapitres II** et **III** à l'étude de sources quelconques dans les domaines spatial et spectral. Nous avons ré-exprimer les six fonctions caractéristiques et leurs dix relations de passage ; ces dernières ont été synthétisées à la **figure 4.11**.

Nous avons ensuite exploré les parentés profondes qui existent entre les fonctions magnétiques et gravimétriques. Les différentes relations de Poisson sont récapitulées à la **figure 4.14**. En *bas* de celle-ci, est indiquée pour chacune des grandeurs leur dépendance en norme et direction.

Ces relations de Poisson sont rarement applicables directement mais les liens mathématiques permettront par la suite de transposer des résultats connus pour les fonctions gravimétriques aux fonctions magnétiques.

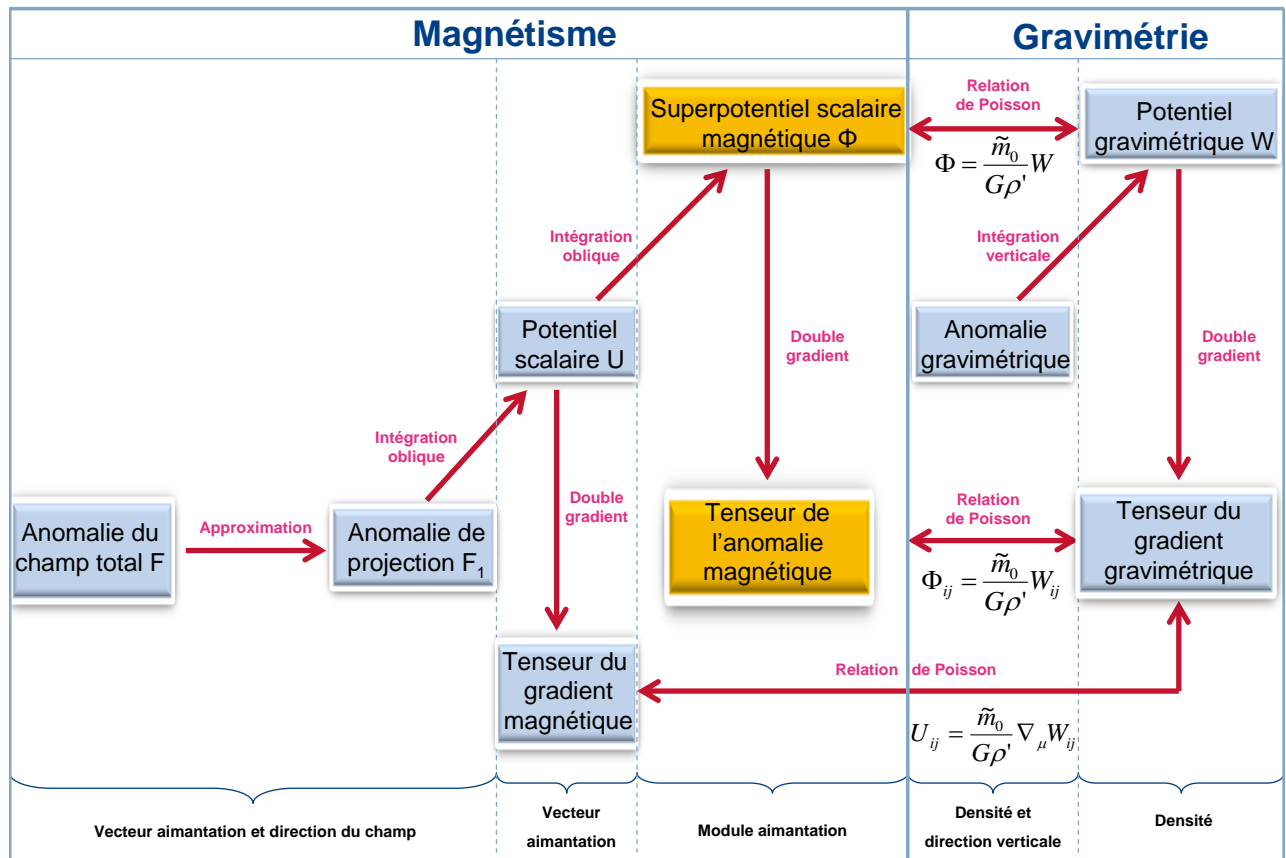


Figure 4.14 : Vue générale des fonctions scalaires magnétiques et de leurs correspondances en gravimétrie avec les relations de passage.

Les deux chapitres suivants abordent les applications du superpotentiel et de son tenseur dérivé pour l'interprétation, d'abord pour des cas d'anomalies synthétiques et enfin pour des données réelles.

Chapitre V

UTILISATION DU SUPERPOTENTIEL ET DU TENSEUR DE L'ANOMALIE MAGNÉTIQUE

5.1	LE SUPERPOTENTIEL EN MODÉLISATION MAGNÉTIQUE	152
5.1.1	<i>Ligne finie plongeante de dipôles magnétiques</i>	153
5.1.2	<i>Superpotentiels scalaire et vecteur</i>	154
5.1.3	<i>Potentiels scalaire et vecteur</i>	155
5.1.4	<i>Anomalie et vecteur magnétique</i>	156
5.2	LE TENSEUR DE L'ANOMALIE MAGNÉTIQUE EN INVERSION	159
5.2.1	<i>Calcul pratique du tenseur à partir de l'anomalie</i>	159
5.2.2	<i>Calcul du déterminant du tenseur magnétique</i>	165
5.2.3	<i>Analyse en éléments propres du tenseur magnétique.....</i>	166
5.2.3.1	<i>Détermination des valeurs propres</i>	167
5.2.3.2	<i>Indice de dimensionnalité.....</i>	171
5.2.3.3	<i>Détermination des vecteurs propres</i>	172
5.2.4	<i>Estimation de profondeur de source</i>	175
5.2.4.1	<i>Superpotentiel approximé de la ligne de dipôle.....</i>	175
5.2.4.2	<i>Signal analytique du superpotentiel.....</i>	176
5.2.4.3	<i>Rapport du signal analytique du superpotentiel avec la composante zz du TAM..</i>	178
5.3	BILAN ET CONCLUSIONS.....	180

“ Le Verbe est intimement potentiel (et par là ontogéniquement pataphysique ou générateur de Solutions Imaginaires) : c’est en cela qu’il est D’ieu.”

Le collège de Pataphysique de l’Oulipo

Oulipo, La littérature potentielle, 1973

Chapitre V : UTILISATION DU SUPERPOTENTIEL ET DU TENSEUR DE L'ANOMALIE MAGNÉTIQUE

Ce chapitre met à contribution les résultats théoriques importants des chapitres précédents afin d'améliorer les outils de modélisation et d'interprétation en méthode magnétique. En particulier, la mise en œuvre de la fonction superpotentiel et de son supertenseur dérivé est détaillée pour l'étude de sources magnétiques étendues.

Dans une première section, nous testons l'efficacité de l'utilisation du superpotentiel pour calculer, par simples dérivations, les potentiels et anomalies de la source magnétique.

Dans une seconde section, le superpotentiel et le tenseur de l'anomalie magnétique sont utilisés pour estimer les caractéristiques géométriques de la source. Chaque composante du supertenseur permet de faire ressortir une direction privilégiée. Une analyse en éléments propres est ensuite appliquée à ce supertenseur afin de localiser horizontalement les structures ainsi que leur azimuth pour les corps purement 2D. Pour compléter quantitativement la localisation du corps, sa profondeur est estimée en calculant le rapport maximum entre la dérivée d'ordre 1 du signal analytique du superpotentiel et la composante verticale du tenseur de l'anomalie magnétique en un point à l'aplomb de la source.

5.1 LE SUPERPOTENTIEL EN MODÉLISATION MAGNÉTIQUE

L'objectif de cette section est de montrer l'utilité des fonctions superpotentiels en modélisation magnétique. En effet, l'étude des sources magnétiques nécessite de calculer les diverses fonctions magnétiques introduites au **chapitre II** et synthétisées à la **figure 2.16**. Cependant, le calcul de l'expression littérale de l'anomalie créée par une source non ponctuelle utilise souvent des intégrations difficiles. Ici, nous présentons une manière originale et plus simple d'obtenir l'anomalie à partir du superpotentiel. Ce dernier est d'abord calculé par intégration de fonctions relativement élémentaires, puis les autres fonctions magnétiques sont déduites par simples dérivations.

Nous illustrons cette méthode par l'étude d'une source plongeante de dipôles.

5.1.1 Ligne finie plongeante de dipôles magnétiques

La ligne finie et plongeante de dipôles est une source intéressante pour l'étude des effets magnétiques des corps étroits et allongés tels que les veines minéralisées ou bien des sources anthropiques telles que les tuyaux. Les composantes du champ magnétique ont été calculées par Jain (1991) en utilisant un calcul intégral compliqué. Nous nous proposons de retrouver ces résultats de façon plus simple en mettant à profit la fonction superpotentiel.

Nous considérons une ligne de dipôles de longueur $L' = 40$ m présentant un azimuth $\theta = 45^\circ$ et un pendage $\varphi = 20^\circ$. Le cas de la ligne horizontale ($\varphi = 0^\circ$) sera aussi évoqué. La ligne est contenue dans le plan OxZ d'un système de coordonnées dont l'origine est prise à 1 m au-dessus de l'extrémité supérieure de la ligne. La déclinaison (D) et l'inclinaison (I) du champ de référence sont respectivement 15° et 60° et dont les cosinus directeurs sont (L, M, N) dans le repère géographique $OXYZ$. Soit $\tilde{m}_0 = 1000$ A.m, le moment magnétique par unité de longueur, ses cosinus directeurs sont (l, m, n) dans ce même repère.

Comme le montre la **figure 5.1**, une rotation d'un angle θ d'axe OZ permet de passer du repère $OXYZ$ au repère local $OxyZ$. Les relations de passage permettant de passer d'un repère à l'autre s'écrivent classiquement

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta \quad \text{et} \quad y = X \sin \theta + Y \cos \theta. \quad (\text{Eq-5.1})$$

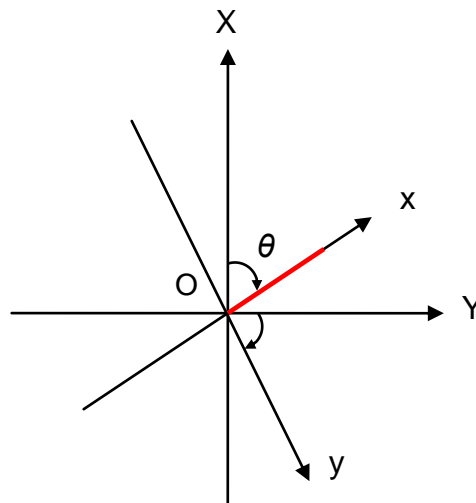


Figure 5.1 : Vue en plan des deux systèmes de coordonnées. La ligne rouge montre la projection horizontale de la pente de dipôles sur le repère géographique local.

5.1.2 Superpotentiels scalaire et vecteur

Pour effectuer les calculs du superpotentiel vecteur créé par la source magnétique, il est plus commode de se placer dans le système de coordonnées OxyZ. Ses trois composantes au point d'observation $\vec{r} = (x, y, z)$ créées par un élément $d\ell'$ de la ligne de dipôles, situé en $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, sont

$$d\Pi_x = \tilde{m}_0 \frac{l}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} d\ell', \quad d\Pi_y = \tilde{m}_0 \frac{m}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} d\ell' \quad \text{et} \quad d\Pi_z = \tilde{m}_0 \frac{n}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} d\ell', \quad (\text{Eq-5.2})$$

avec $\vec{r}_0 = (0, \ell' \cos \varphi, z_1 + \ell' \sin \varphi).$ (Eq-5.3)

Les trois composantes du superpotentiel vecteur, créées par la ligne entière, sont calculées par intégration sur toute la longueur de l'objet considéré

$$\Pi_x = \int_0^{L'} d\Pi_x, \quad \Pi_y = \int_0^{L'} d\Pi_y \quad \text{et} \quad \Pi_z = \int_0^{L'} d\Pi_z. \quad (\text{Eq-5.4})$$

La première intégrale peut aussi s'écrire

$$\Pi_x = \tilde{m}_0 \int_0^{L'} \frac{l}{(a - 2b\ell' + \ell'^2)^{1/2}} d\ell', \quad (\text{Eq-5.5})$$

où $a^2 = x^2 + y^2 + (z - z_1)^2$ et $b = y \cos \varphi + (z - z_1) \sin \varphi.$ (Eq-5.6)

Cette intégration relativement classique a pour expression

$$\Pi_x = \tilde{m}_0 l \ln \frac{a + b}{b - L' + (a^2 - 2bL' + L'^2)^{1/2}}. \quad (\text{Eq-5.7})$$

Les deux autres composantes sont calculées de façon similaire et la fonction superpotentiel scalaire se déduit aisément à partir de l'équation 2.49

$$\Phi = \tilde{m}_0 \ln \frac{a + b}{b - L' + (a^2 - 2bL' + L'^2)^{1/2}}. \quad (\text{Eq-5.8})$$

La **figure 5.2** montre les cartes de la fonction Φ sur lesquelles les vecteur horizontaux formés par (Π_x, Π_y) ont été superposés.

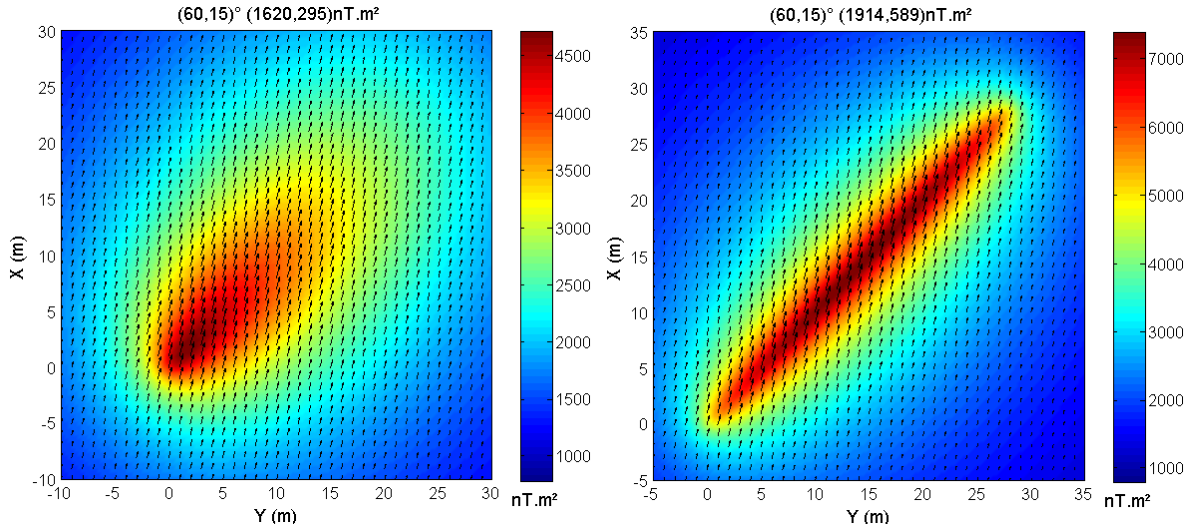


Figure 5.2 : Superpotentiels créés par une ligne de 20° de pendage (à gauche) et une ligne horizontale (à droite). Le fond coloré indique les variations de la fonction scalaire et les flèches représentent la composante horizontale normée de la fonction vectorielle.

5.1.3 Potentiels scalaire et vecteur

Le potentiel scalaire créé par la ligne de dipôles se déduit des égalités 2.66 et 5.8

$$U = -l\tilde{m}_0 \frac{x}{b+a} \left(\frac{1}{a} - \frac{b+a}{ec} \right) - m\tilde{m}_0 \left(\frac{e}{b+a} \left(\cos \varphi + \frac{y}{a} \right) - \frac{\cos \varphi + \frac{y-L' \cos \varphi}{c}}{e} \right) - \frac{n\tilde{m}_0}{b+a} \left(\sin \varphi + \frac{z-z_1}{a} - \frac{b+a}{e} \left(\sin \varphi + \frac{z-z_1-L' \sin \varphi}{c} \right) \right), \quad (\text{Eq-5.9})$$

$$\text{où} \quad c^2 = a - L', \quad e = b + c - L' \quad (\text{Eq-5.10})$$

et a, b sont définis par l'équation 5.6.

Le potentiel vecteur magnétique se calcule à partir de l'équation 5.8 en utilisant l'équation 2.72

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{n\tilde{m}_0}{b+a} \left(\cos \varphi + \frac{y}{a} \right) - \frac{n\tilde{m}_0}{e} \left(\cos \varphi + \frac{y-L' \cos \varphi}{c} \right) - \frac{m\tilde{m}_0}{b+a} \left(\sin \varphi + \frac{z-z_1}{a} \right) - \frac{m\tilde{m}_0}{e} \left(\sin \varphi + \frac{z-z_1-L' \sin \varphi}{c} \right), \\ A_y &= \frac{l\tilde{m}_0}{b+a} \left(\sin \varphi + \frac{z-z_1}{a} \right) - \frac{l\tilde{m}_0}{e} \left(\sin \varphi + \frac{z-z_1-L' \sin \varphi}{c} \right) - n\tilde{m}_0 \frac{x}{b+a} \left(\frac{1}{a} - \frac{b+a}{ec} \right), \\ A_z &= m\tilde{m}_0 \frac{x}{b+a} \left(\frac{1}{a} - \frac{b+a}{ec} \right) - \frac{l\tilde{m}_0}{b+a} \left(\cos \varphi + \frac{y}{a} \right) - \frac{l\tilde{m}_0}{e} \left(\cos \varphi + \frac{y-L' \cos \varphi}{c} \right). \end{aligned} \quad (\text{Eq-5.11})$$

La **figure 5.3** montre les cartes de la fonction U sur lesquelles les vecteurs horizontaux formés par (A_x, A_y) ont été superposés.

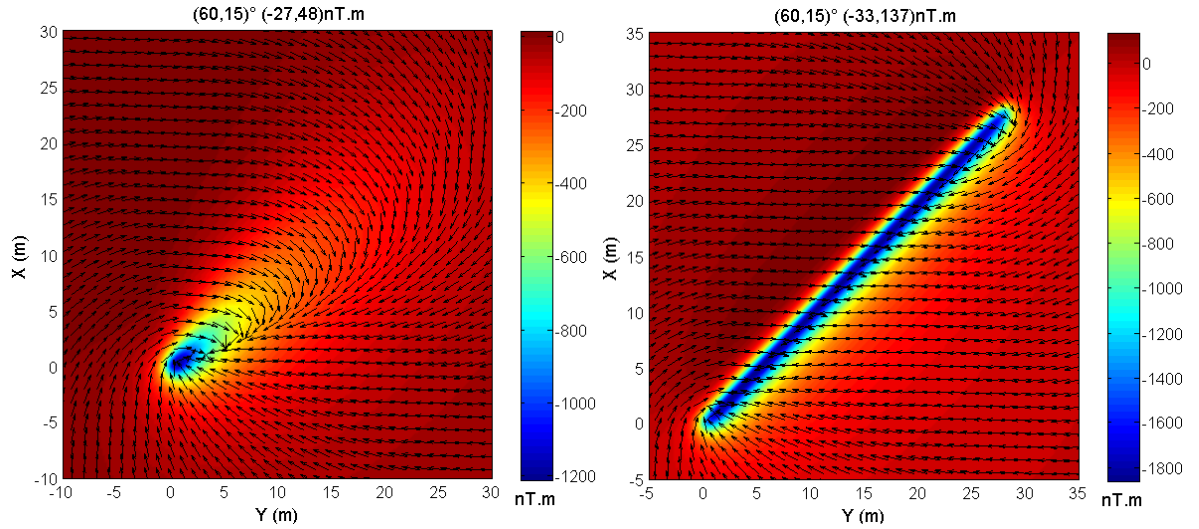


Figure 5.3 : Potentiels créés par une ligne de 20° de pendage (à gauche) et une ligne horizontale (à droite). Le fond coloré indique les variations de la fonction scalaire et les flèches représentent la composante horizontale normée de la fonction vectorielle.

5.1.4 Anomalie et vecteur magnétique

Poursuivons notre développement et calculons à présent les fonctions champ d'anomalie et anomalies magnétiques dues à cette ligne de dipôles. Par souci de concision, des expressions plus courtes, mais moins explicites contenant un produit de convolution sont utilisées.

Le champ d'anomalie est obtenu par le gradient du potentiel donné par l'équation 5.9.

$$\vec{C}(\vec{r}) = -\tilde{m}_0 \delta_c * \frac{1}{r^5} \begin{pmatrix} lr^2 - 3x\vec{\mu} \cdot \vec{r} \\ mr^2 - 3y\vec{\mu} \cdot \vec{r} \\ nr^2 - 3z\vec{\mu} \cdot \vec{r} \end{pmatrix}, \quad (\text{Eq-5.12})$$

où δ_c est un pseudo-Dirac, c'est-à-dire une distribution appropriée décrivant la ligne.

L'anomalie de projection est déduite par dérivation oblique du potentiel au moyen des équations 2.30 et 5.9

$$F_1 = -\tilde{m}_0 \delta_c * \frac{1}{r^5} \left(L(lr^2 - 3x\vec{\mu} \cdot \vec{r}) + M(mr^2 - 3y\vec{\mu} \cdot \vec{r}) + N(nr^2 - 3z\vec{\mu} \cdot \vec{r}) \right). \quad (\text{Eq-5.13})$$

Jain (1991) a obtenu des résultats identiques aux nôtres pour chacune de ces deux fonctions.

La **figure 5.4** montre les cartes de la fonction F_1 sur lesquelles les vecteurs horizontaux formés par (C_x, C_y) ont été superposés. Nous considérons par ailleurs un champ parallèle à la direction d'aimantation de la ligne.

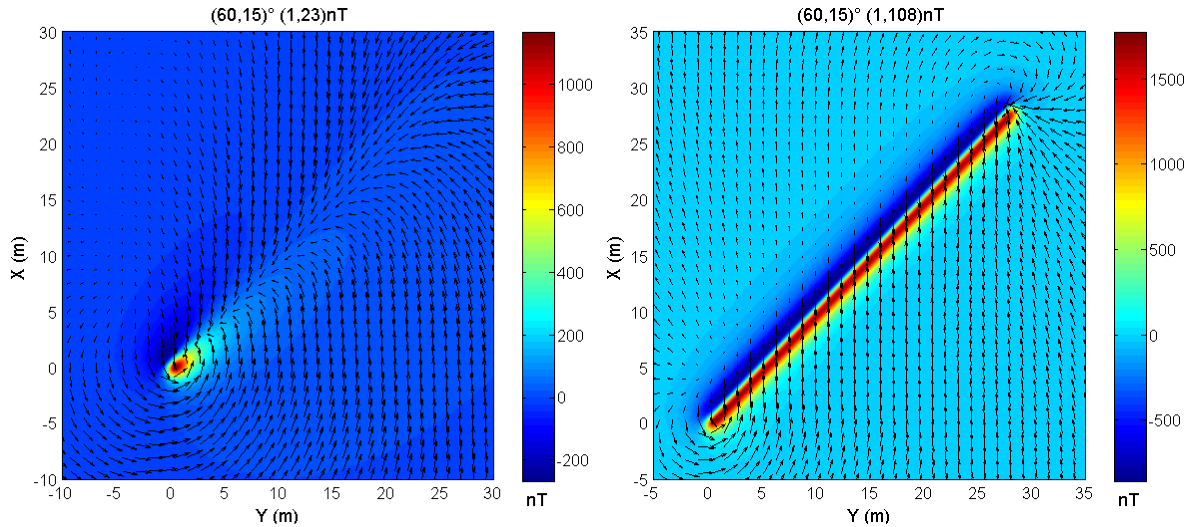


Figure 5.4 : Anomalies créées par une ligne de 20° de pendage (à gauche) et une ligne horizontale (à droite). Le fond coloré indique les variations de la fonction scalaire et les flèches représentent la composante horizontale normée de la fonction vectorielle.

Les figures précédentes utilisaient une distribution linéaire de couleurs ; afin de rendre le graphe de la fonction anomalie plus lisible, une distribution par équipopulation de couleur est adoptée à la **figure 5.5**. Dans ce mode de représentation, l'ensemble des pixels de l'image est réparti en un certain nombre de classes de couleurs (ici 200), d'effectifs identiques. Ceci explique pourquoi l'amplitude des variations apparaît modifiée sur ce mode de représentation.

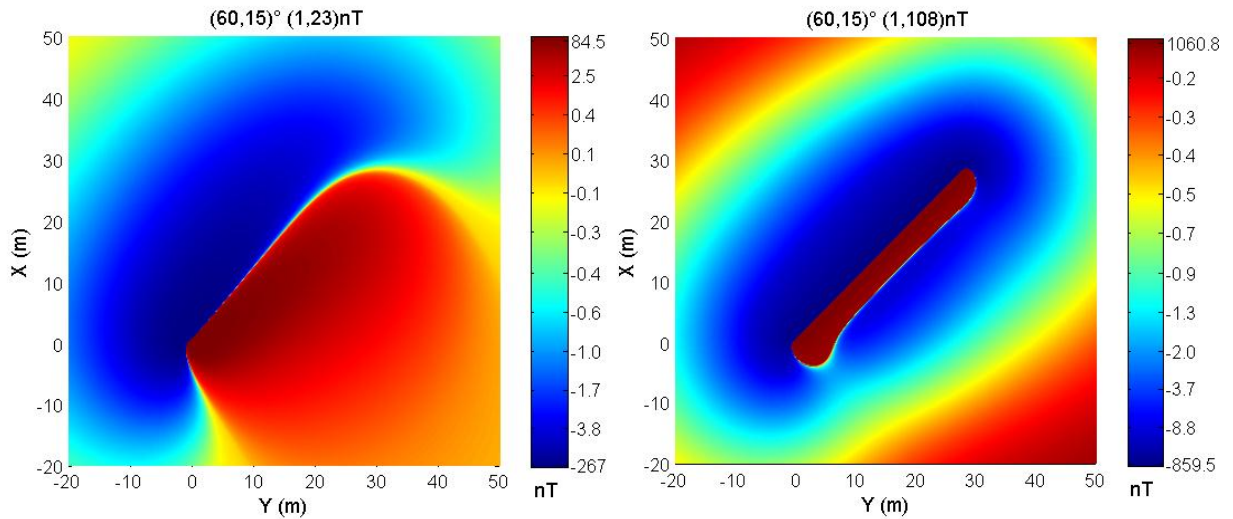


Figure 5.5 : Anomalies créées par une ligne de 20° de pendage (à gauche) et une ligne horizontale (à droite) en équipopulation de couleurs.

Afin d'évaluer plus précisément la différence entre l'anomalie mesurée F et l'anomalie calculée F_1 , nous appliquons la double boucle décrite au **paragraphe 2.2.4** pour des amplitudes d'anomalie raisonnables, dans le cas de la ligne horizontale. Notons que la différence $F - F_1$ est positive, comme le prévoit l'équation **1.21**.

L'expression de l'anomalie F utilisée est déduite de l'équation **5.12**, d'après la définition **1.4**

$$F = \sqrt{\left(R_x - \tilde{m}_0 \delta_c * \frac{1}{r^5} (lr^2 - 3x\vec{\mu} \cdot \vec{r})\right)^2 + \left(R_y - \tilde{m}_0 \delta_c * \frac{1}{r^5} (mr^2 - 3y\vec{\mu} \cdot \vec{r})\right)^2 + \left(R_z - \tilde{m}_0 \delta_c * \frac{1}{r^5} (nr^2 - 3z\vec{\mu} \cdot \vec{r})\right)^2} - R. \quad (\text{Eq-5.14})$$

Sur le premier graphe à *gauche* de la **figure 5.6**, nous faisons varier le moment linéique de 0 à 0.018 A.m (avec un pas de 0,0005) afin de calculer l'amplitude de l'anomalie correspondante pour des inclinaisons allant de 0 à 90° (avec un pas de 1). La déclinaison est fixée à 15°.

Sur le graphe au *milieu*, nous en déduisons les différences maximales entre les deux anomalies en fonction de l'inclinaison et de l'amplitude de l'AICM. Celles-ci atteignent 500 nT pour une inclinaison de 45° et une anomalie de l'ordre de 9000 nT, soit une erreur d'environ 6 %. En termes de moyenne des différences, les calculs numériques montrent que ces écarts sont divisés par 2.

Sur le graphe à *droite*, nous fixons cette fois l'inclinaison à 45° puis nous calculons les différences maximales entre les deux anomalies en fonction de la déclinaison et de l'amplitude de l'AICM. L'erreur commise, dans ce cas, est du même ordre de grandeur que précédemment ; elle est obtenue pour une déclinaison nulle.

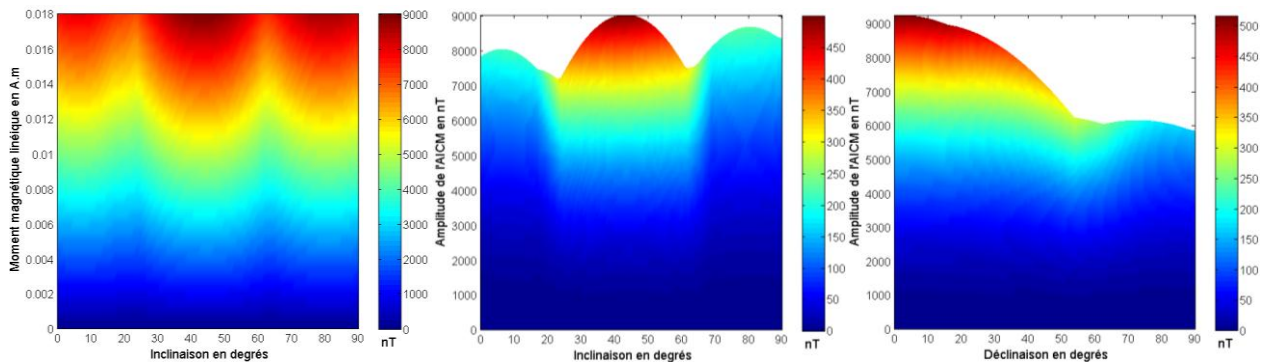


Figure 5.6 : Représentations de l'amplitude de l'AICM pour des moments magnétiques et inclinaisons variables (à gauche) ainsi que les différences maximales entre l'AICM et l'AICM1, pour des inclinaisons et intensités variables (au milieu) et pour des déclinaisons et intensités variables (à droite).

Dans la section suivante, nous travaillons dans le domaine spectral ; connaissant l'anomalie mesurée, nous utiliserons le résultat **1.20** afin de réduire l'erreur sur l'anomalie de projection. Cela nous permettra ensuite d'appliquer les relations de passage établies aux chapitres précédents pour calculer les fonctions magnétiques utiles à l'interpréteur, en particulier le nouveau tenseur de l'anomalie magnétique.

5.2 LE TENSEUR DE L'ANOMALIE MAGNÉTIQUE EN INVERSION

L'étude des différentes sources magnétiques aux chapitres précédents a montré que l'anomalie du champ total en un point est souvent peu représentative des variations d'aimantation dans le sol. En effet, le caractère doublement vectoriel des méthodes magnétiques rend le signal difficile à interpréter. Les deux directions, champ magnétique et aimantation, sont a priori indépendantes sauf dans le cas d'aimantation induite par le champ extérieur où les deux directions sont parallèles. Nous nous placerons dans cette situation dans la suite de ce travail.

Pour faciliter l'interprétation d'une carte d'anomalie magnétique, le tenseur de l'anomalie magnétique est un bon candidat puisque chacune de ses composantes donne un éclairage pertinent sur la géométrie de la source. En effet, comme nous l'avons montré au **paragraphe 2.6.2**, les neuf composantes de ce tenseur réunissent les neuf réductions, doubles ou croisées, de l'anomalie. De plus, la forme matricielle de cette grandeur nous invite à utiliser les outils de l'algèbre afin de compléter quantitativement son étude.

5.2.1 Calcul pratique du tenseur à partir de l'anomalie

En pratique, le point de départ du traitement de la donnée magnétique est la mesure de l'anomalie F sur le terrain représentée sur la **figure 5.7** pour la ligne horizontale. Pour calculer le tenseur de l'anomalie magnétique, nous allons appliquer la chaîne d'opérations présentée à la **figure 3.14**. Pour se faire, il faudra donc évaluer l'anomalie F_l puis son superpotentiel.

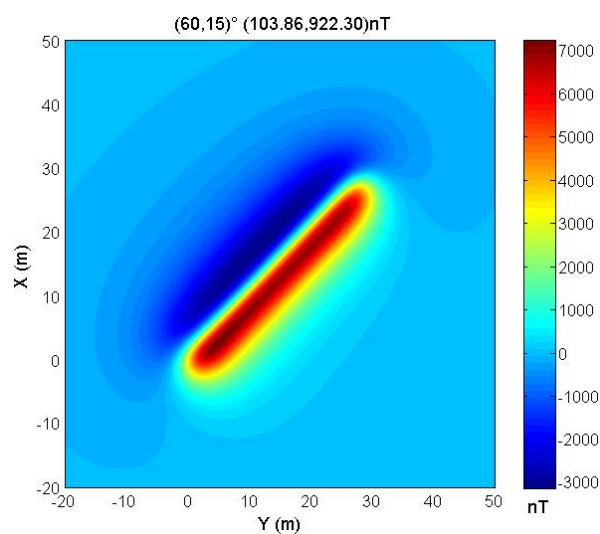


Figure 5.7 : AICM créée par un segment horizontal de dipôles pour $I = 60^\circ$ et $D = 15^\circ$.

Classiquement, les deux fonctions F et F_1 sont identifiées, mais nous allons utiliser les résultats du **chapitre I** pour minimiser l'erreur commise dans l'approximation **1.9** en estimant F_1 à partir de F . La **figure 5.8** montre, à *gauche*, la différence entre ces deux fonctions, en supposant F_1 connue. La moyenne des différences est de l'ordre de 119 nT sur toute la grille mais atteint jusqu'à 550 nT (soit environ 8 %) à l'aplomb de l'objet. Pour minimiser cet écart, la relation **1.20** est utilisée pour estimer F_1 plus précisément. Ce calcul divise l'erreur commise quasiment par 5, descendant sous la barre des 2 % ; mais il reste imparfait comme le montre la figure, à *droite*, représentant la nouvelle fonction soustraite à F_1 .

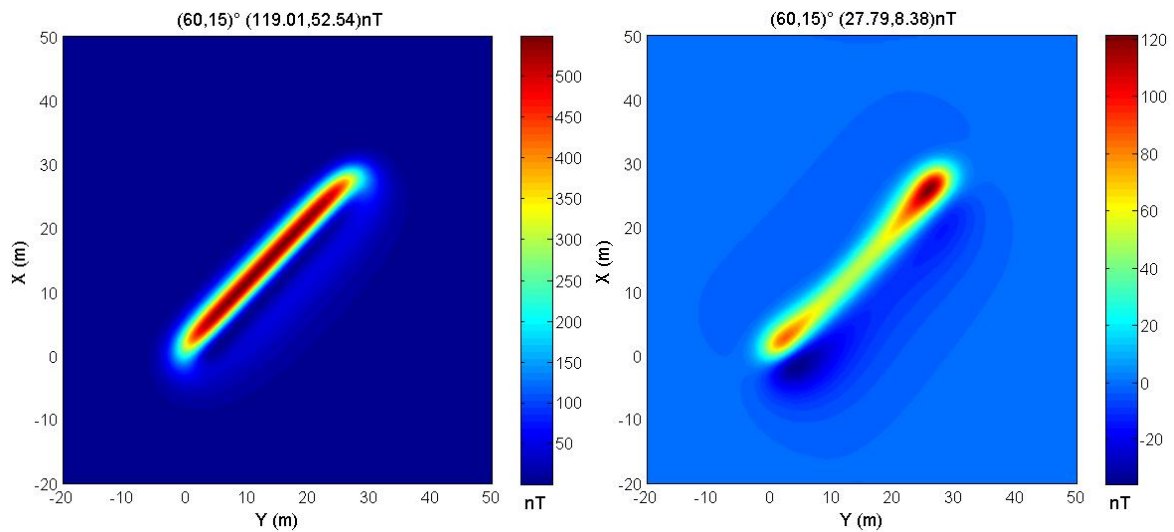


Figure 5.8 : Représentation des différences entre l'AICM et l'AICM1 (à *gauche*) et entre l'AICM1 estimée et l'AICM1 du modèle (à *droite*).

Cette différence résiduelle est liée aux limites de cette méthode qui requiert C , calculable mais avec les réserves mentionnées au **paragraphe 3.2.6.2.1.2** à propos de la transformée de Fourier. La **figure 5.9** permet de comparer graphiquement l'AICM1, estimée et utilisée pour la suite des opérations, avec l'ACM1 vraie. Nous considérerons que ces 2 % d'erreur sont négligeables par rapport aux imprécisions résultantes des calculs suivants.

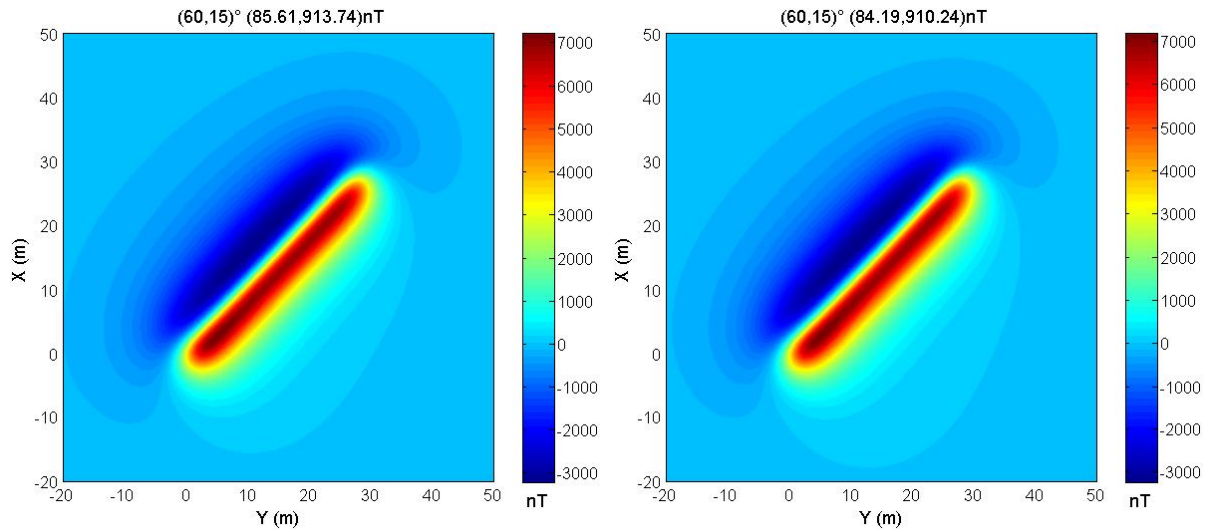


Figure 5.9 : Représentation de l'AICM1 estimée (à gauche) et de l'AICM1 vraie (à droite).

La nouvelle fonction F_1 est doublement intégrée dans le domaine spectral au moyen de la relation 3.60 dans les directions des aimantations et du champ supposées connues et parallèles. Le résultat obtenu est transformé dans le domaine spatial afin d'obtenir le superpotentiel représenté, à gauche, sur la figure 5.10. Celui-ci peut être comparé, à droite, avec le vrai superpotentiel du corps supposé connu.

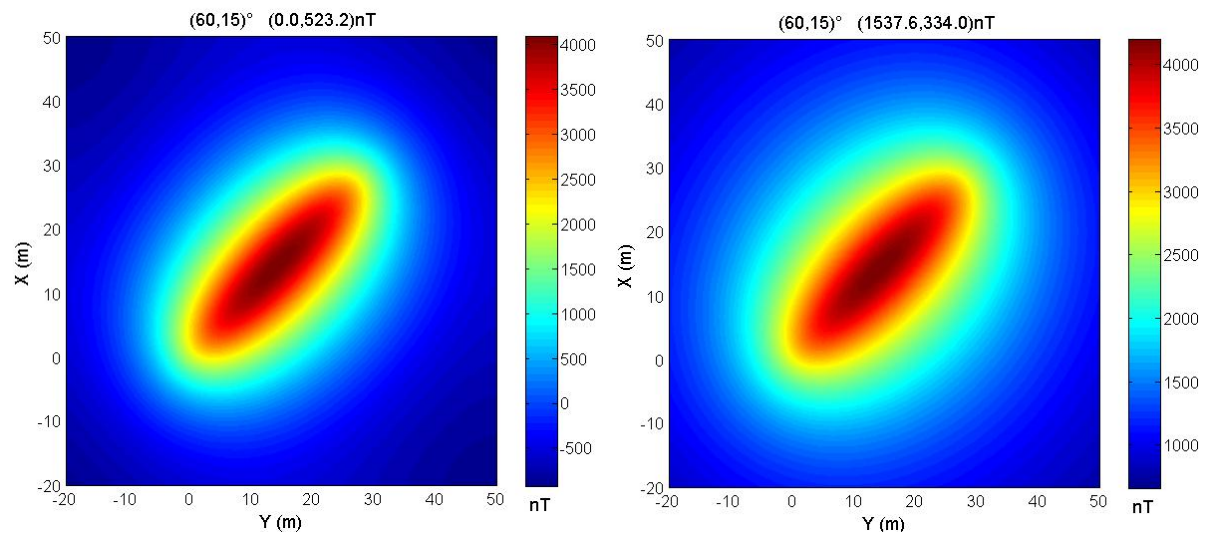


Figure 5.10 : Représentation des superpotentiels issus du calcul spectral (à gauche) et du calcul spatial (à droite).

Les composantes du tenseur sont ensuite obtenues au moyen de l'équation matricielle 3.78, exprimée dans le domaine spectral. Les figures 5.11 représentent six de ces composantes précisant de plus la projection de la source dans le plan horizontal.

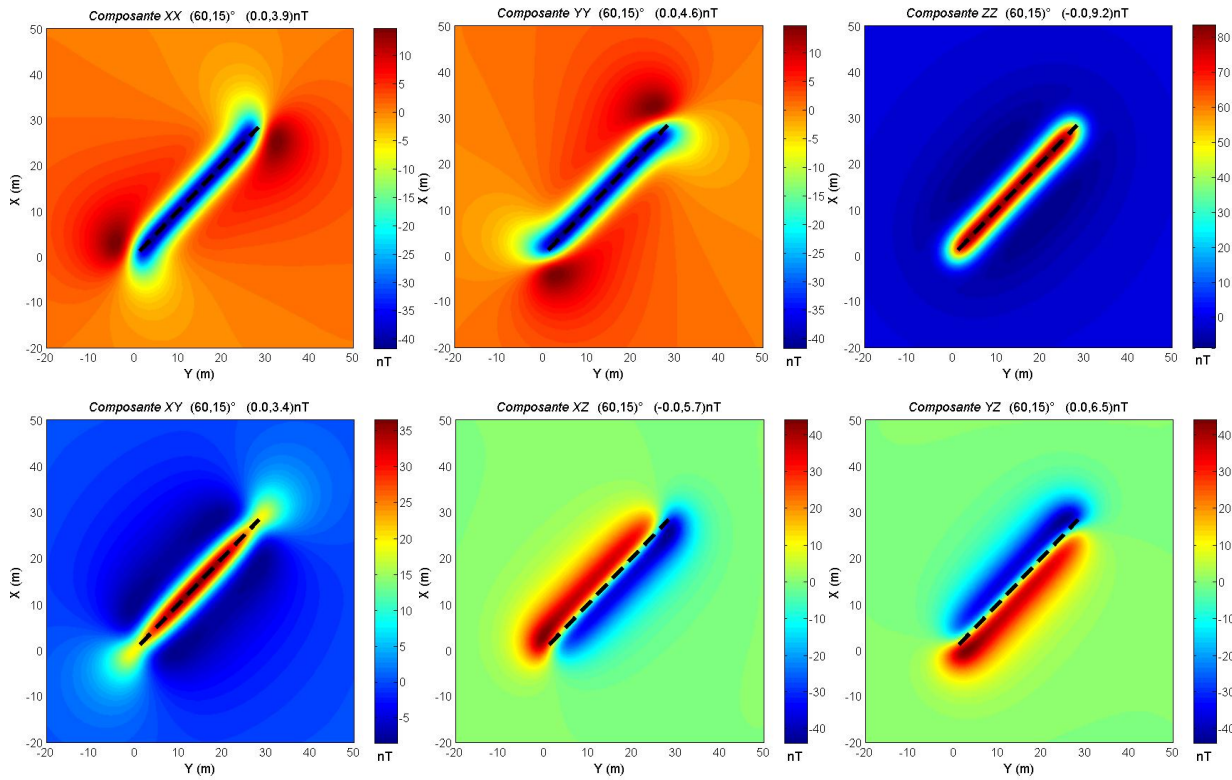


Figure 5.11 : Six composantes du tenseur associé à la source magnétique représentée par les pointillés NE-SO.

Pour comprendre l'intérêt du tenseur du point de vue de l'interprétation structurale, nous considérons aussi des segments horizontaux d'orientations différentes.

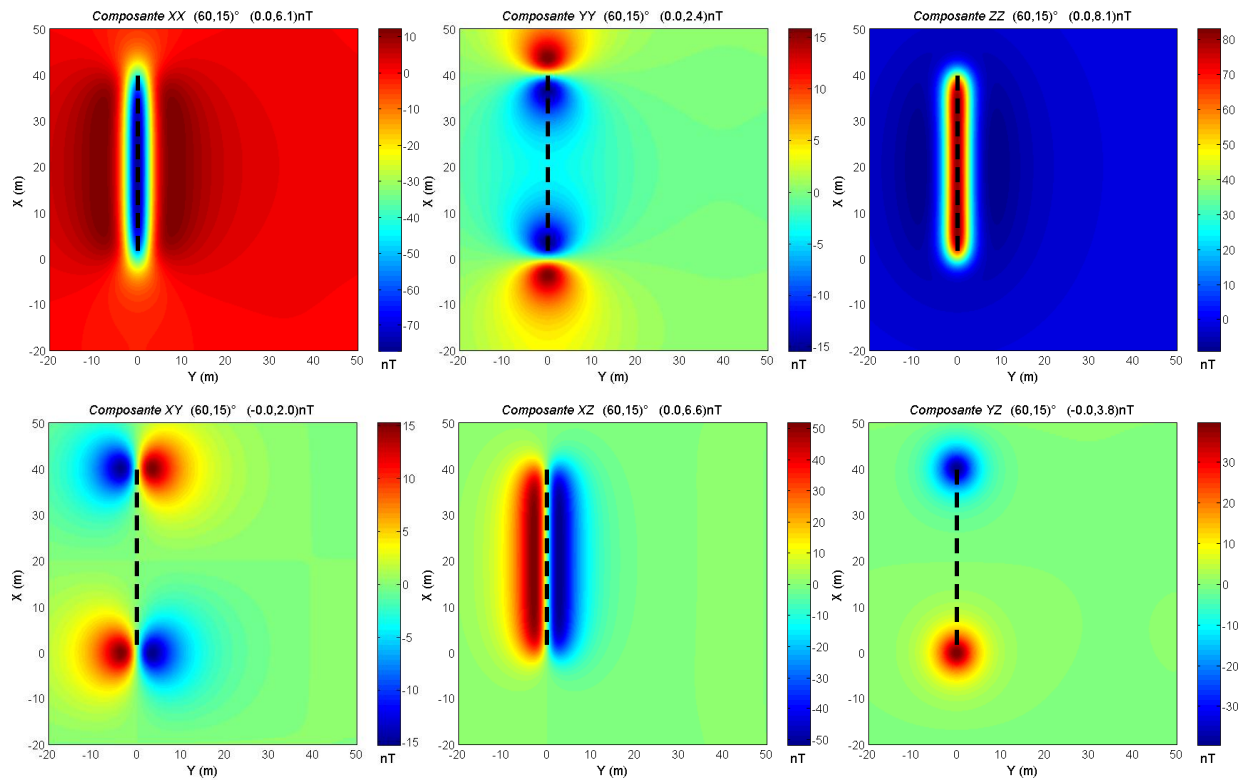


Figure 5.12 : Six composantes du tenseur associé à la source magnétique représentée par les pointillés N-S.

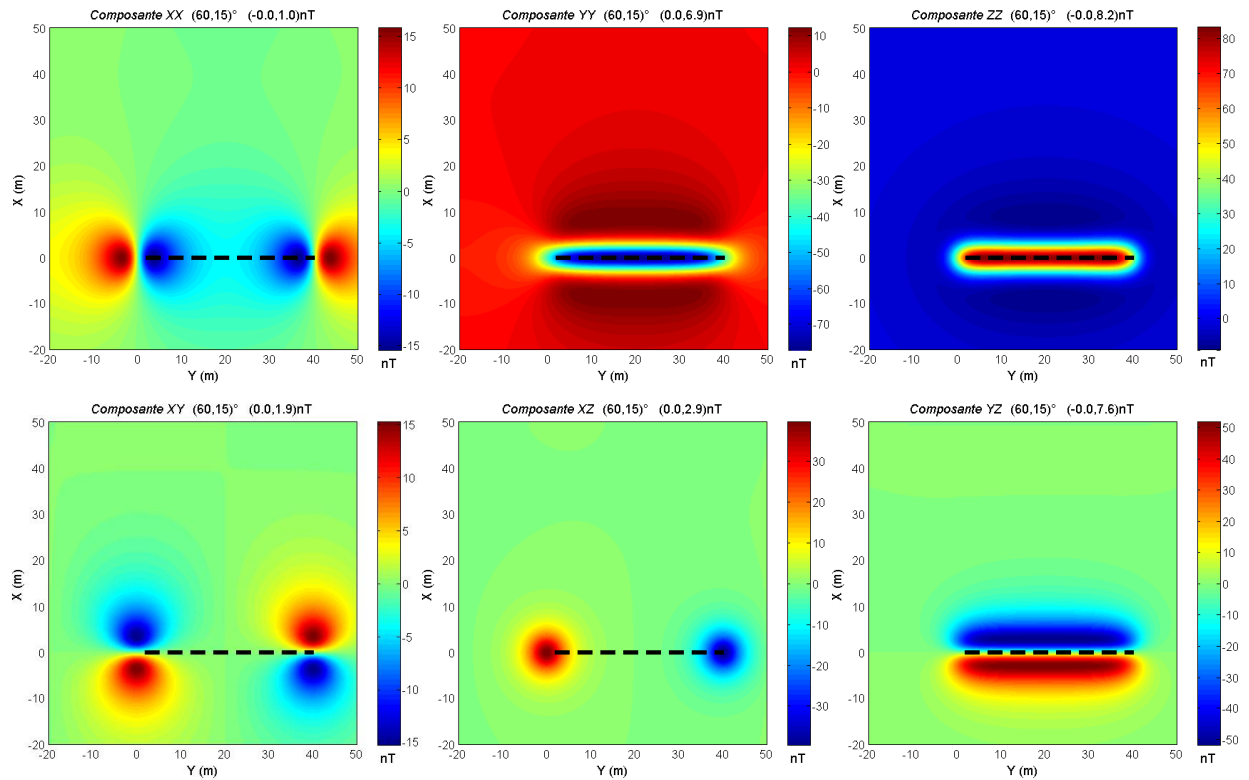


Figure 5.13 : Six composantes du tenseur associé à la source magnétique représentée par les pointillés E-O.

Les figures 5.12 et 5.13 représentent le TAM pour le même objet mais orienté, respectivement, dans la direction N-S puis E-O.

Cette analyse tensorielle de l'anomalie permet de détecter les directions privilégiées de l'objet :

- Les composantes xx et yy du tenseur font ressortir, respectivement, les directions N-S et E-O de la structure. Elles correspondent effectivement aux deux réductions à l'équateur. Ainsi, un objet orienté N-S sera difficilement détectable par la composante yy du tenseur mais ressortira plus nettement par la composante xx .
- La composante zz verticalise les deux vecteurs champ et aimantation confirmant l'intérêt de la réduction au pôle : l'anomalie est rendue symétrique présentant un maximum à l'aplomb de la structure.
- La composante xy se révèle particulièrement intéressante pour les corps d'orientation NE-SO. En effet, comme son calcul privilégie autant la direction N-S que E-O, le résultat final est donc un compromis des deux directions. Sur la figure 5.11, il faut noter que la composante xy du tenseur présente des maxima plus resserrés à l'aplomb de l'anomalie que pour la composante zz . Cette composante et son symétrique semblent donc plus

performants pour détecter les structures s'étirant selon les directions bissectrices du plan horizontal, ce résultat sera mis à profit au chapitre suivant.

- Les composantes xz et yz du tenseur permettent de visualiser préférentiellement les directions N-S et E-O, respectivement. Ces composantes sont moins intéressantes dans le plan horizontal et gagneraient en efficacité pour des mesures sur paroi verticale.

Il est intéressant de comparer ces résultats avec les composantes mieux connues du **TGM** calculées dans le domaine spectral et représentées à la **figure 5.14**.

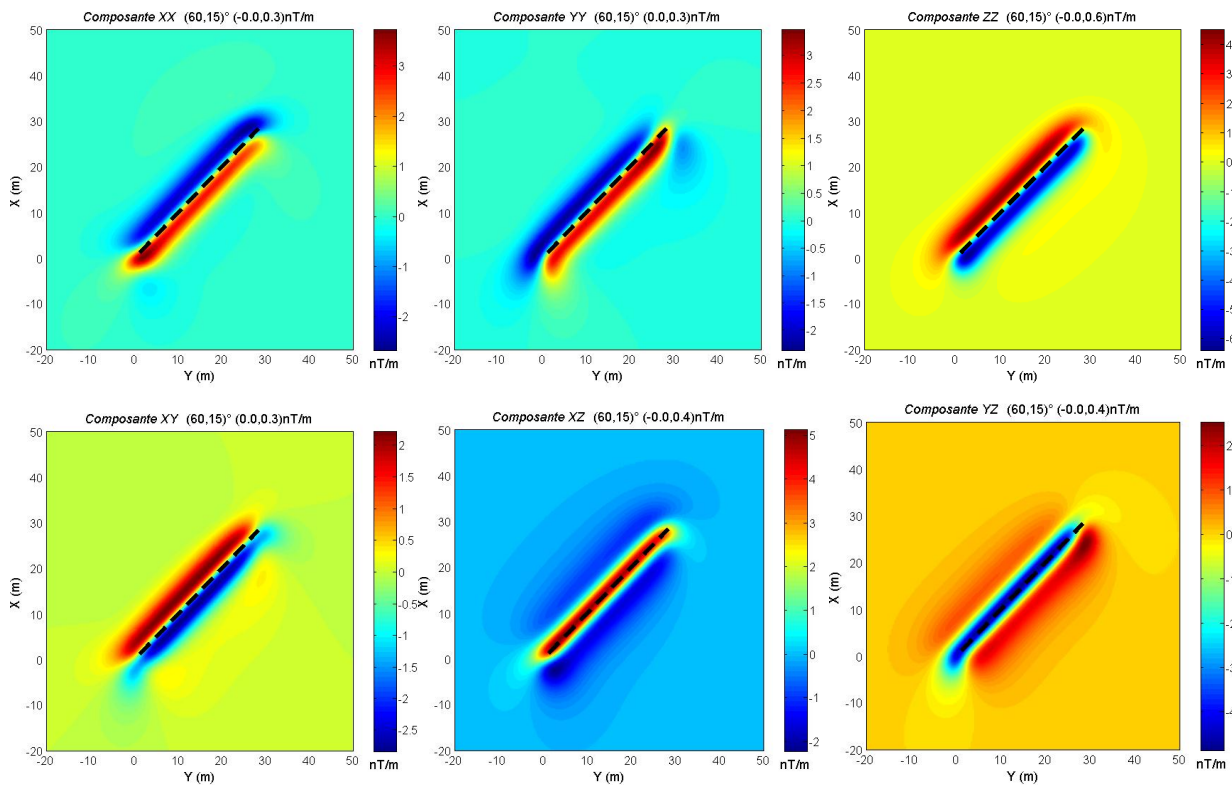


Figure 5.14 : Tenseur du gradient magnétique (ligne NE-SO).

Les composantes de ce tenseur comportent un ordre de dérivation supérieur à celles du **TAM**. Par conséquent, le signal obtenu est de plus haute fréquence et resserré au-dessus de l'objet. Cependant, cela entraîne un inconvénient majeur : une plus haute sensibilité aux bruits de mesure et aux bruits numériques. A cela s'ajoute l'inconvénient signalé au **paragraphe 2.6.2** de la localisation décalée du toit de la source par rapport aux maxima des signaux, lié à la définition du **TGM**. Les six vignettes de la figure **5.14** montrent clairement des effets de distorsion liés à la dépendance du tenseur à la direction d'aimantation.

5.2.2 Calcul du déterminant du tenseur magnétique

Comme le tenseur de l'anomalie magnétique **TAM** est un tenseur carré et symétrique, sa représentation matricielle est carrée et symétrique dans n'importe quel repère. En effet, l'application correspondante est bilinéaire et symétrique. Par la suite nous identifierons le tenseur et sa représentation matricielle. Il est donc possible d'appliquer tous les outils de l'algèbre matricielle en particulier le calcul de son déterminant.

Il est intéressant de l'évaluer car il peut donner un éclairage intéressant sur la source, il est donné par

$$\det(\mathbf{TAM}) = \begin{vmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} \\ \Phi_{yx} & \Phi_{yy} & \Phi_{yz} \\ \Phi_{zx} & \Phi_{zy} & \Phi_{zz} \end{vmatrix} = \Phi_{xx}(\Phi_{yy}\Phi_{zz} - \Phi_{zy}\Phi_{yz}) - \Phi_{yx}(\Phi_{xy}\Phi_{zz} - \Phi_{xz}\Phi_{zy}) + \Phi_{zx}(\Phi_{xy}\Phi_{yz} - \Phi_{xz}\Phi_{yy}). \quad (\text{Eq-5.15})$$

Or le tenseur est symétrique, par conséquent

$$\det(\mathbf{TAM}) = \Phi_{xx}(\Phi_{yy}\Phi_{zz} - \Phi_{yz}^2) - \Phi_{xy}^2\Phi_{zz} - \Phi_{xz}^2\Phi_{yy} + 2\Phi_{xy}\Phi_{xz}\Phi_{yz}. \quad (\text{Eq-5.16})$$

Un calcul strictement équivalent donne pour le **TGM**

$$\det(\mathbf{TGM}) = U_{xx}(U_{yy}U_{zz} - U_{yz}^2) - U_{xy}^2U_{zz} - U_{xz}^2U_{yy} + 2U_{xy}U_{xz}U_{yz}. \quad (\text{Eq-5.17})$$

Nous évaluons chacun des deux déterminants à partir des composantes obtenues au paragraphe précédent pour le segment bissecteur. Le résultat est donc une combinaison des composantes du tenseur. Celle-ci a pour effet de concentrer le maximum d'amplitude du signal au-dessus du contraste maximum de susceptibilité magnétique. Ainsi, l'illustre la **figure 5.15**.

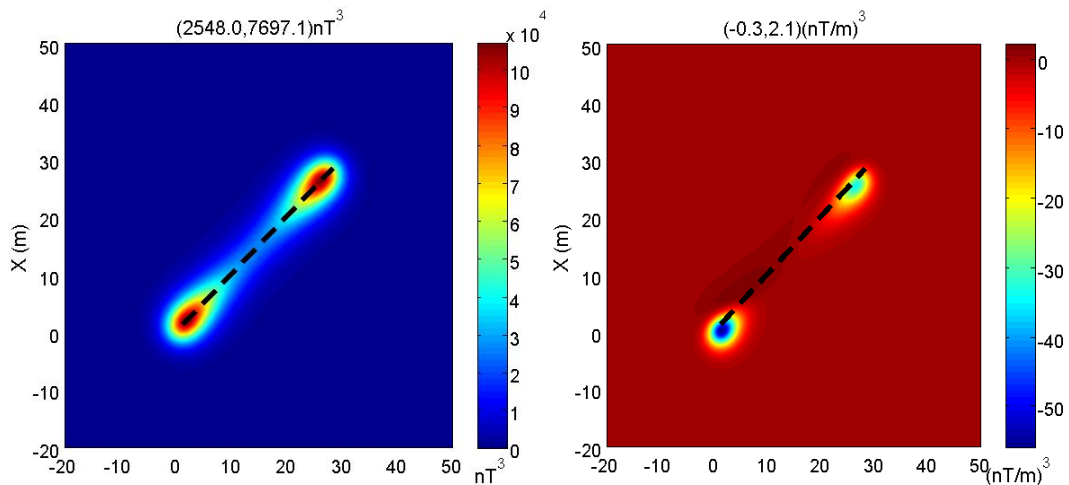


Figure 5.15 : Déterminant du tenseur d'anomalie magnétique (à gauche) et du tenseur du gradient magnétique (à droite).

À *gauche*, l'amplitude maximale du déterminant du tenseur de l'anomalie est obtenue à l'aplomb des extrémités de la source. Sur la carte de *droite*, les conclusions sont identiques pour le **TGM** mais un décalage persiste entre la localisation horizontale de la source et celles des extrema (ici minima) de son déterminant.

Cette transformation de carte a pour avantage d'amplifier les signaux cohérents, au-dessus des extrémités de la source, et d'atténuer les signaux non cohérents, en particulier les bruits.

Il est intéressant d'envisager le cas particulier de la ligne infinie ; on considère la même source étendue mais de longueur 10000 unités. La carte du déterminant est présentée sur la **figure 5.16**. Les signatures des deux extrémités du segment sont montrées sur les deux premières vignettes et présentent des allures analogues au cas précédent. La troisième vignette montre la carte du déterminant pour une zone située loin des extrémités. Dans ce cas, le corps peut être considéré comme quasi 2D, car infini dans la direction bissectrice du plan. Il est intéressant de constater que, dans cette zone, la valeur du déterminant est sub-nulle, l'amplitude du signal étant divisée par un facteur 10^5 .

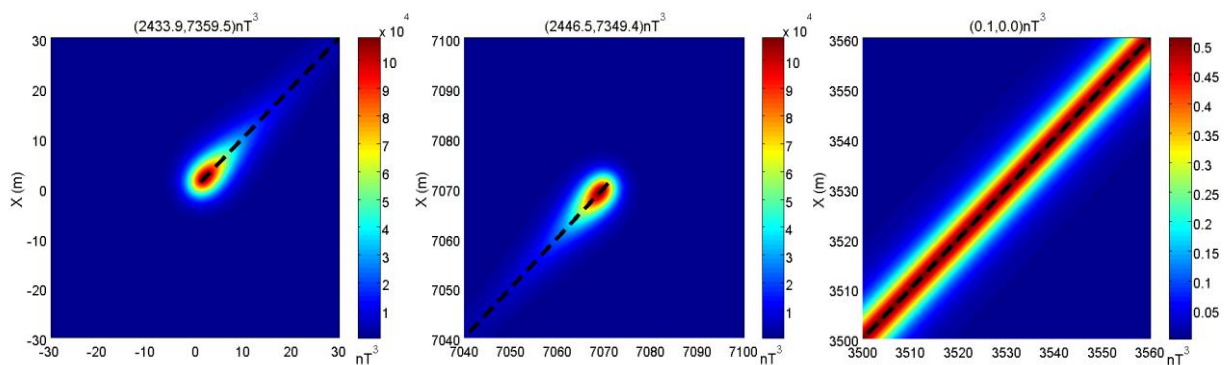


Figure 5.16 : Déterminant du tenseur de l'anomalie magnétique pour une ligne « infinie » : de gauche à droite la signature des deux extrémités puis celle d'un point loin des bords.

Ce résultat peut être généralisé à tout objet 2D. Finalement, le calcul du déterminant peut se révéler intéressant dans la caractérisation d'objet infini dans une direction horizontale.

5.2.3 Analyse en éléments propres du tenseur magnétique

Comme la représentation matricielle de **TAM** est carrée et symétrique, alors il existe une base de vecteurs propres, appelée base propre $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, dans laquelle la représentation matricielle de l'application est une matrice diagonale **D**

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{Eq-5.18})$$

avec λ_1 , λ_2 et λ_3 les trois valeurs propres rangées par ordre *décroissant*.

La détermination de la matrice diagonale \mathbf{D} revient à trouver la matrice \mathbf{P} telle que

$$\mathbf{TAM} = \mathbf{P.D.P}^{-1}, \quad (\text{Eq-5.19})$$

avec \mathbf{P} la matrice des vecteurs propres $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

En plus de ses propriétés de symétrie, la matrice \mathbf{TAM} est réelle, elle est donc diagonalisable à l'aide d'une matrice orthogonale. Par conséquent, ses valeurs propres sont réelles et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

5.2.3.1 Détermination des valeurs propres

Comme pour tout tenseur d'ordre 2, le calcul de ses valeurs propres passe par l'annulation du polynôme caractéristique $P_T(\lambda)$. Ce polynôme est obtenu par le calcul du déterminant suivant

$$P_T(\lambda) = \det(\mathbf{TAM} - \lambda \mathbf{I}_3), \quad (\text{Eq-5.20})$$

avec \mathbf{I}_3 la matrice identité d'ordre 3 car \mathbf{TAM} est représentée par une matrice d'ordre 3.

Son polynôme caractéristique est bien connu et s'écrit

$$P_T(\lambda) = \lambda^3 - \text{tr}(\mathbf{TAM})\lambda^2 - \tau(\mathbf{TAM})\lambda - \det(\mathbf{TAM}), \quad (\text{Eq-5.21})$$

avec

$$\tau(\mathbf{TAM}) = \frac{1}{2} (\text{tr}(\mathbf{TAM}^2) - (\text{tr}(\mathbf{TAM}))^2). \quad (\text{Eq-5.22})$$

Rappelons que les coefficients du polynôme caractéristique sont des invariants, c'est-à-dire que chaque coefficient est le même dans toute base, à condition de normaliser le polynôme en divisant le polynôme par le coefficient de plus haut degré. Les termes T_1 , T_2 et T_3 représentent les invariants fondamentaux du tenseur, appelés respectivement le premier, le deuxième et le troisième invariant. Ainsi

$$P_T(\lambda) = \lambda^3 + T_1 \lambda^2 + T_2 \lambda + T_3, \quad (\text{Eq-5.23})$$

avec

$$\begin{cases} T_1 = -\text{tr}(\mathbf{TAM}), \\ T_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{TAM})^2 - \text{tr}(\mathbf{TAM}^2)), \\ T_3 = -\det(\mathbf{TAM}). \end{cases} \quad (\text{Eq-5.24})$$

Soit avec les coefficients du **TAM** dans une base quelconque, on obtient

$$\begin{cases} T_1 = 0, \\ T_2 = \frac{1}{2}(2\Phi_{yz}^2 - 2\Phi_{xy}^2 - 2\Phi_{xz}^2 - \Phi_{xx}^2 - \Phi_{yy}^2 - \Phi_{zz}^2), \\ T_3 = \Phi_{xx}(\Phi_{yz}^2 - \Phi_{yy}\Phi_{zz}) + \Phi_{xy}^2\Phi_{zz} + \Phi_{xz}^2\Phi_{yy} - 2\Phi_{xy}\Phi_{xz}\Phi_{yz}. \end{cases} \quad (\text{Eq-5.25})$$

Soit avec les coefficients du **TAM** dans la base propre, on obtient

$$\begin{cases} T_1 = 0, \\ T_2 = -\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2), \\ T_3 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{cases} \quad (\text{Eq-5.26})$$

Les valeurs propres sont solution de l'équation **5.23**, qui est de degré 3. Il y a donc bien trois valeurs propres qui sont elles-mêmes des invariants et peuvent donc s'exprimer en fonction de T_1 , T_2 et T_3 . La matrice étant positive et inversible, c'est-à-dire définie positive, ses valeurs propres sont donc toutes positives.

Comme le premier invariant est nul, on obtient immédiatement le polynôme de Cardan

$$P_T(\lambda) = \lambda^3 + T_2\lambda + T_3. \quad (\text{Eq-5.27})$$

La méthode de Cardan (1545), repris par Spiegel (1968), permet de résoudre les équations de ce type. Comme $T_2 < 0$ et $\left(\frac{T_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{T_3}{2}\right)^3 \leq 0$, les racines du polynôme **5.27** sont donc

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\sqrt{-\frac{T_2}{3}} \cos \frac{\alpha}{3}, \\ \lambda_2 = -2\sqrt{-\frac{T_2}{3}} \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right), \\ \lambda_3 = -2\sqrt{-\frac{T_2}{3}} \cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right), \end{cases} \quad (\text{Eq-5.28})$$

avec

$$\cos \alpha = -\frac{T_3/2}{\sqrt{-(T_2/3)^3}}. \quad (\text{Eq-5.29})$$

Ces trois valeurs propres sont calculées en chaque point de la grille au moyen des composantes du tenseur. La **figure 5.17** donne une représentation graphique de chacune d'entre elles pour la ligne horizontale.

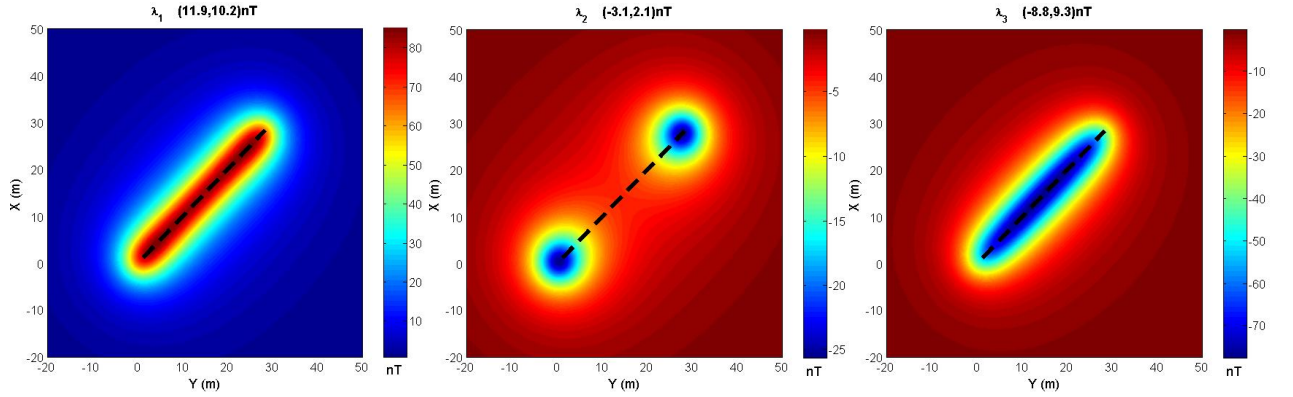


Figure 5.17 : Représentation des valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 pour un segment horizontal.

La **figure 5.18** donne une représentation graphique des valeurs propres pour la ligne pentée.

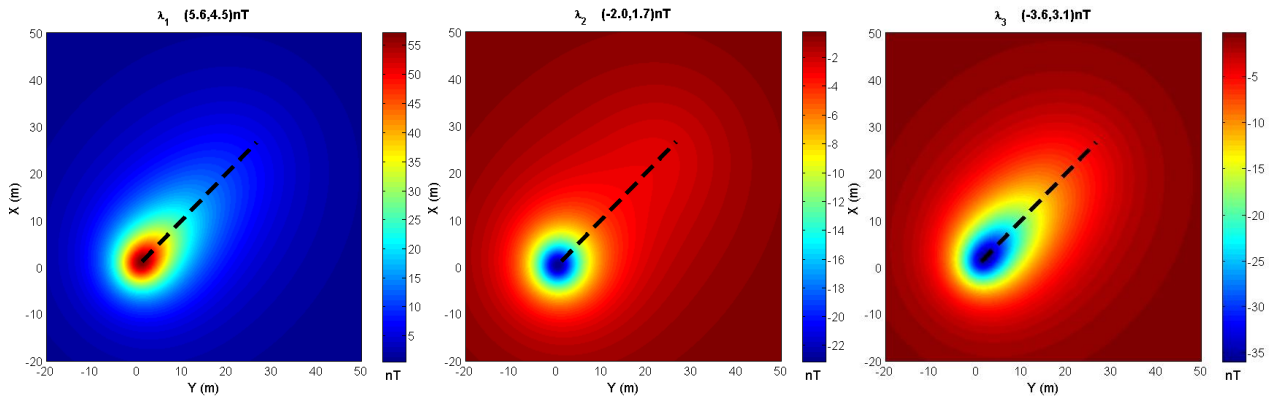


Figure 5.18 : Représentation des valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 pour un segment penté de 20° .

Il est intéressant de remarquer la ressemblance, au signe près, entre la première et la troisième valeur propre. Par ailleurs, notre étude sur le déterminant du tenseur de l'anomalie d'un corps 2D à

la fin du **paragraphe 5.2.2**, nous conduit à supputer une valeur nulle pour la seconde valeur propre à l'aplomb du milieu de la structure. Afin de vérifier ces suppositions, nous explorons le cas de la ligne infinie (purement 2D) puis le cas du segment quasi ponctuel (purement 3D).

Les **figures 5.19** et **5.20** représentent les résultats des valeurs propres calculées dans ces deux situations.

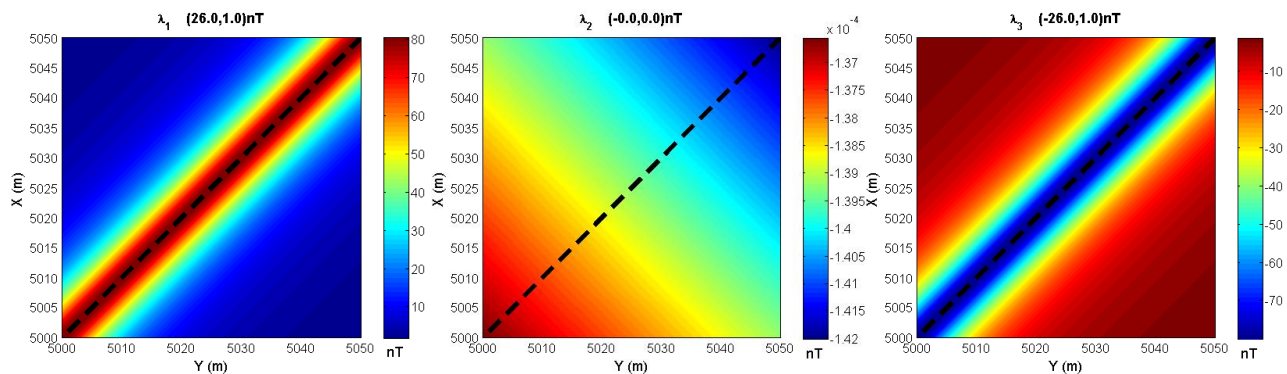


Figure 5.19 : Représentation des valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 pour une ligne horizontale « infinie ».

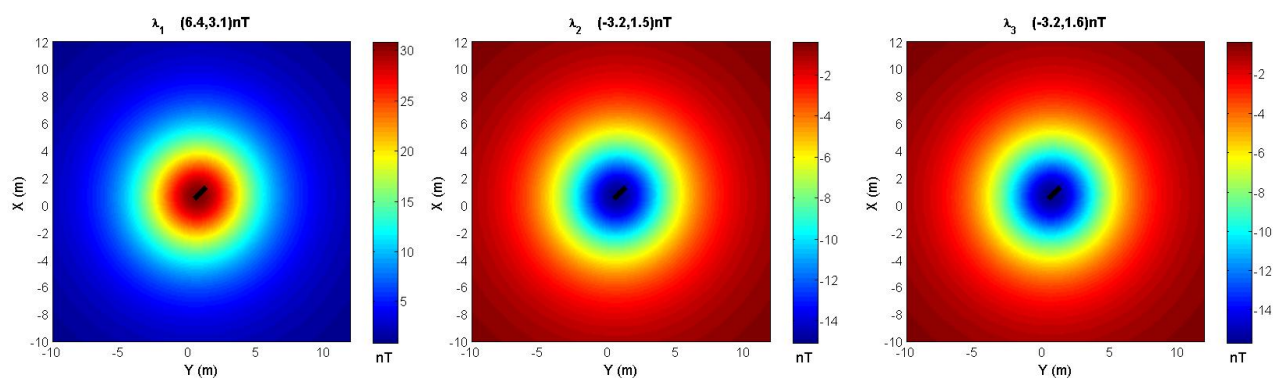


Figure 5.20 : Représentation des valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 pour un segment quasi ponctuel.

Finalement, il apparaît clairement que l'étude des valeurs propres permet de distinguer les corps 2D des corps 3D :

- pour un corps 2D, nous avons $\lambda_1 = -\lambda_3$ et $\lambda_2 = 0$;
- pour un corps 3D, nous avons $\lambda_2 = \lambda_3$ et $\lambda_1 = -2\lambda_2$.

Ce critère pourra se révéler intéressant pour déterminer la dimension d'une géométrie inconnue. Ce critère rejoint l'*indice de dimensionnalité* introduit par Pedersen et Rasmussen (1990) pour les sources associées à des anomalies gravimétriques.

5.2.3.2 Indice de dimensionnalité

Pedersen et Rasmussen (1990) ont introduit un *indice de dimensionnalité* obtenu à partir du tenseur du gradient gravimétrique. D'après la relation **4.33** entre tenseurs gravimétriques et magnétiques, nous pouvons étendre sa définition au **TAM** ; voici son expression

$$I_d = -\frac{27T_3^2}{4T_4^3}, \quad (\text{Eq-5.30})$$

avec

$$T_4 = \Phi_{xx}\Phi_{yy} + \Phi_{yy}\Phi_{zz} + \Phi_{xx}\Phi_{zz} - \Phi_{xy}^2 - \Phi_{yz}^2 - \Phi_{xz}^2, \quad (\text{Eq-5.31})$$

c'est-à-dire

$$T_4 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3. \quad (\text{Eq-5.32})$$

Cet indice I_d , sans dimension, varie entre 0 et 1. Les faibles valeurs reflètent une géométrie quasi 2D, on retrouve, alors, le cas du déterminant nul ($T_3 = 0$) et de la deuxième valeur propre nulle ; tandis que les valeurs proches de l'unité sont obtenues pour des géométries quasi 3D, confirmant aussi nos observations sur les valeurs propres. L'indice est calculé en chaque point de la grille et représenté à la **figure 5.21** dans trois situations.

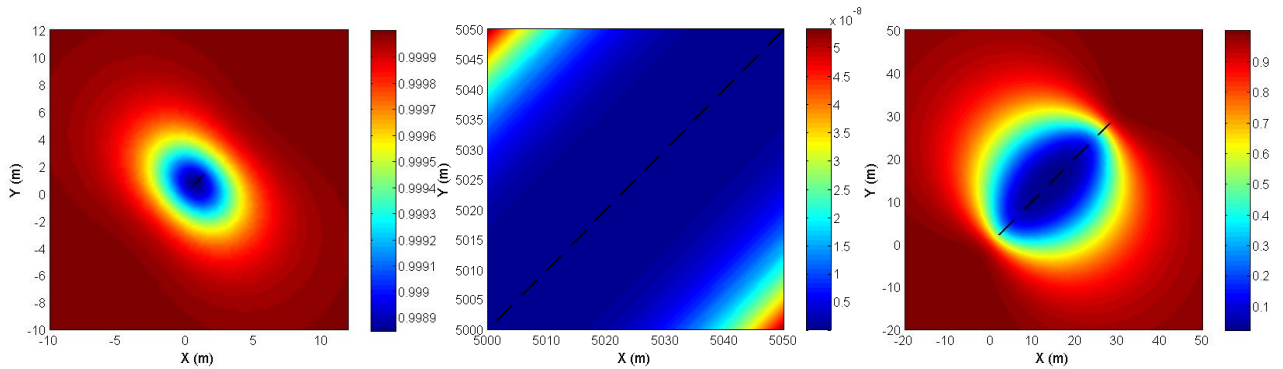


Figure 5.21 : Représentation des valeurs d'indice de dimensionnalité pour un segment horizontal quasi ponctuel (à gauche), infiniment long (au milieu) et de longueur intermédiaire (à droite).

- À gauche, la carte de I_d tend vers 1, reflétant une géométrie quasi 3D ; elle est obtenue pour un segment quasi ponctuel (2 unités de longueur).
- Au milieu, la ligne devient quasi infinie (10000 unités de longueur) ; très loin des bords, l'indice tend vers 0 indiquant que la structure est purement 2D.

- À *droite*, l'indice varie de 0,1 à 1, la structure de 40 unités de longueur passe d'un comportement 2D (au voisinage de son centre) à un comportement 3D (près de ses extrémités).

5.2.3.3 Détermination des vecteurs propres

Les vecteurs propres s'expriment de la façon suivante

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \frac{1}{a_{10}} (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3), \\ \vec{v}_2 = \frac{1}{a_{20}} (a_4 \vec{e}_1 + a_5 \vec{e}_2 + a_6 \vec{e}_3), \\ \vec{v}_3 = \frac{1}{a_{30}} (a_7 \vec{e}_1 + a_8 \vec{e}_2 + a_9 \vec{e}_3), \end{cases} \quad (\text{Eq-5.33})$$

avec $a_{10} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $a_{20} = \sqrt{a_4^2 + a_5^2 + a_6^2}$ et $a_{30} = \sqrt{a_7^2 + a_8^2 + a_9^2}$. (Eq-5.34)

Pour obtenir les neuf coefficients constituant les trois vecteurs propres, on résout chacun des trois systèmes d'équations

$$\mathbf{TAM} \cdot \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k, \quad (\text{Eq-5.35})$$

avec \vec{v}_k un vecteur propre associé à λ_k .

Sous cette forme, le système est indéterminé puisque son déterminant est nul. On peut donc y ajouter une condition de norme que l'on rend unitaire. Ensuite, on résout chacun des trois systèmes par une méthode classique de déterminant en se ramenant à un système de deux équations à deux inconnues en considérant l'une des composantes du vecteur propre comme paramètre. À l'issue de ces calculs, on obtient les neuf composantes des vecteurs propres

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_4 = \frac{-\Phi_{xy} - \Phi_{yz} a_7}{\Phi_{yy} - \lambda_1} \\ a_5 = \frac{-\Phi_{xy} - \Phi_{yz} a_8}{\Phi_{yy} - \lambda_2} \\ a_6 = \frac{-\Phi_{xy} - \Phi_{yz} a_9}{\Phi_{yy} - \lambda_3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_7 = \frac{\Phi_{xy}^2 - (\Phi_{yy} - \lambda_1)(\Phi_{xx} - \lambda_1)}{\Phi_{xz}(\Phi_{yy} - \lambda_1) - \Phi_{xy}\Phi_{yz}} \\ a_8 = \frac{\Phi_{xy}^2 - (\Phi_{yy} - \lambda_2)(\Phi_{xx} - \lambda_2)}{\Phi_{xz}(\Phi_{yy} - \lambda_2) - \Phi_{xy}\Phi_{yz}} \\ a_9 = \frac{\Phi_{xy}^2 - (\Phi_{yy} - \lambda_3)(\Phi_{xx} - \lambda_3)}{\Phi_{xz}(\Phi_{yy} - \lambda_3) - \Phi_{xy}\Phi_{yz}} \end{cases} \quad (\text{Eq-5.36})$$

Ce résultat est modifié si les composantes Φ_{xz} et Φ_{xy} sont nulles

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_4 = \frac{-\Phi_{yz}}{\Phi_{yy} - \lambda_1} \\ a_5 = \frac{-\Phi_{yz}}{\Phi_{yy} - \lambda_2} \\ a_6 = \frac{-\Phi_{yz}}{\Phi_{yy} - \lambda_3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_7 = 1 \\ a_8 = 1 \\ a_9 = 1 \end{cases} \quad (\text{Eq-5.37})$$

Ce résultat est modifié si les composantes Φ_{xz} , Φ_{xy} et Φ_{yy} sont nulles

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_4 = \frac{\lambda_1 - \Phi_{zz}}{\Phi_{yz}} \\ a_5 = \frac{\lambda_2 - \Phi_{zz}}{\Phi_{yz}} \\ a_6 = \frac{\lambda_3 - \Phi_{zz}}{\Phi_{yz}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_7 = 1 \\ a_8 = 1 \\ a_9 = 1 \end{cases} \quad (\text{Eq-5.38})$$

Ces trois vecteurs propres sont calculés en chaque point de la grille au moyen des neuf composantes du tenseur. La **figure 5.22** donne une représentation graphique des composantes horizontales de chaque vecteur pour un segment horizontal.

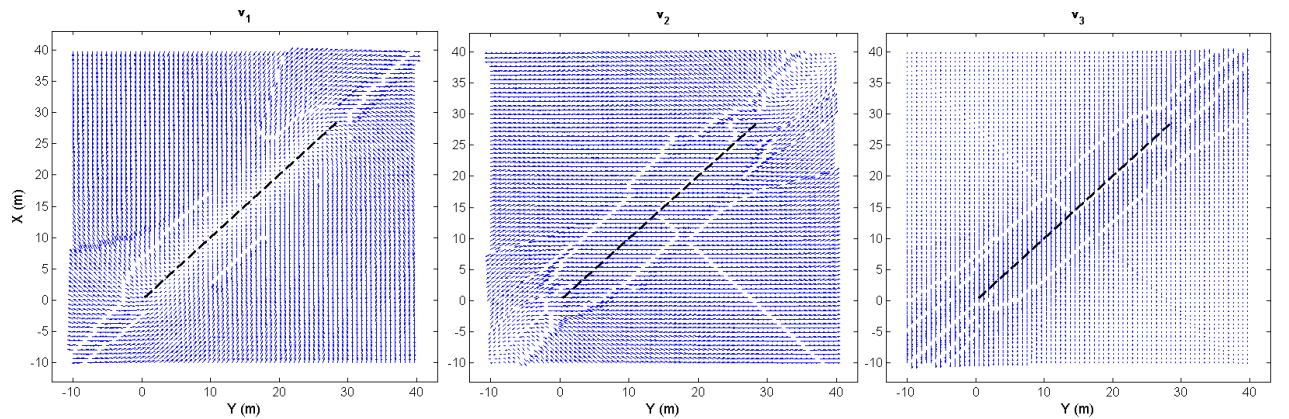


Figure 5.22 : Composantes horizontales des trois vecteurs propres pour le segment horizontal.

La **figure 5.23** revient au cas de la source plongeante.

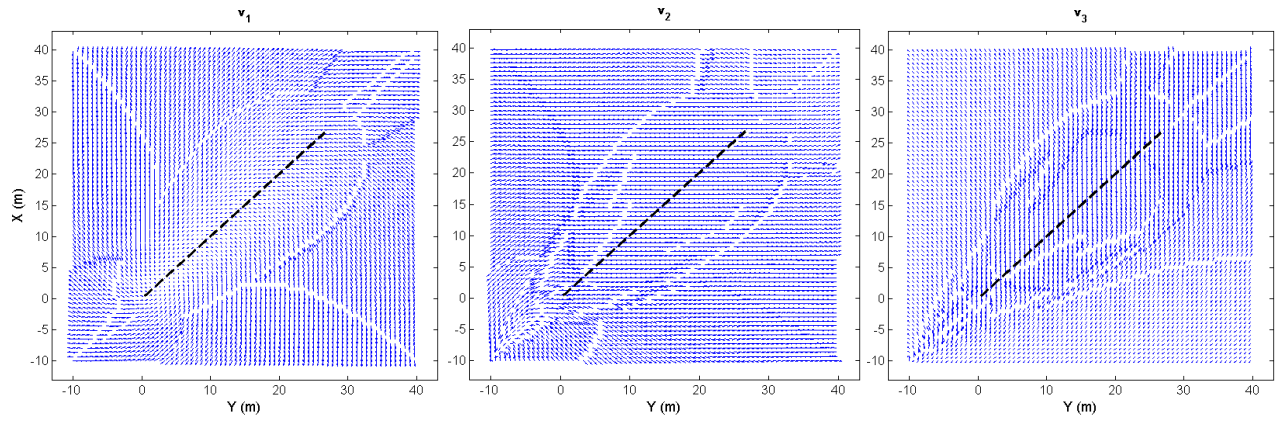


Figure 5.23 : Composantes horizontales des trois vecteurs propres pour le segment penté de 20° .

Parmi ces composantes, la première composante horizontale du vecteur propre est la plus intéressante. En effet, en chaque point de la grille à la verticale de l'objet, elle s'annule, ou du moins présente un minimum. Les deux autres vecteurs propres sont moins pertinents pour retrouver la localisation de l'objet, leur effet intervient en périphérie de la source. En particulier, pour des données réelles ces calculs peuvent présenter des difficultés d'interprétation car plusieurs sources peuvent être imbriquées. Il faudra si possible recourir à des fenêtres glissantes de calcul.

Enfin, il est intéressant de revenir au cas purement 2D de la ligne horizontale infinie. La **figure 5.24** présente les trois vecteurs propres associés à cette géométrie.

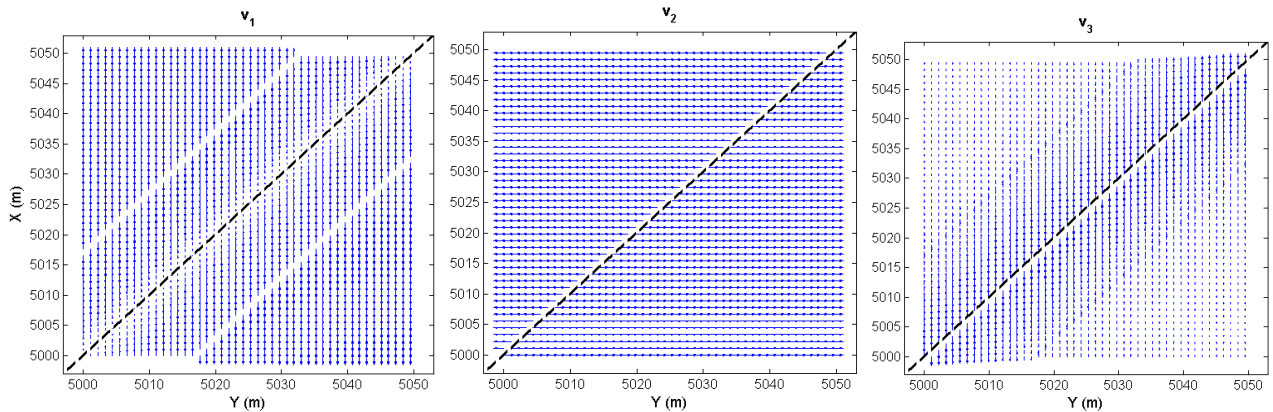


Figure 5.24 : Composantes horizontales des trois vecteurs propres pour la ligne « infinie » horizontale.

Le premier vecteur associé à la plus grande valeur propre permet de localiser la structure et le troisième donne une estimation de l'azimut de la structure 2D. Pour visualiser les trois composantes des vecteurs propres, la **figure 5.25** offre une vue 3D des trois vecteurs propres associés à cette structure. Cette représentation permet de confirmer les observations 2D. Les premiers vecteurs propres sont bien verticaux à l'aplomb de la structure et indiquent clairement son azimut. Les seconds sont sub-horizontaux et n'apportent pas d'information pertinente. Enfin, les

troisièmes marquent clairement l'azimut de la source mais n'offrent pas un critère évident pour la localiser.

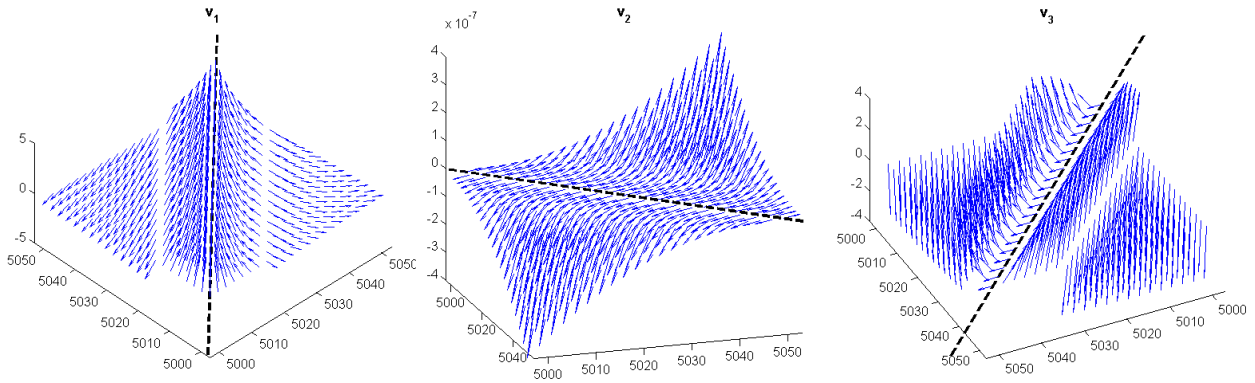


Figure 5.25 : Vue 3D des trois vecteurs propres pour la ligne « infinie » horizontale.

5.2.4 Estimation de profondeur de source

5.2.4.1 Superpotentiel approximé de la ligne de dipôle

Pour simplifier les expressions littérales des fonctions précédentes, nous approximations la ligne droite plongeante par une ligne en marches d'escalier, composée d'un ensemble de segments horizontaux, dont le milieu de chacun d'eux est situé sur la ligne.

La première composante du superpotentiel vecteur engendré par un segment horizontal se calcule facilement par l'intégration suivante

$$\Pi_x = l\tilde{m}_0 \int_{-L'}^{L'} \left(x^2 - (y - \ell')^2 + (z - z_1)^2 \right)^{-1/2} d\ell' \quad (\text{Eq-5.39})$$

et de façon analogue pour les deux autres composantes. La fonction superpotentiel scalaire est déduite de ces trois composantes au moyen de la définition 2.49

$$\Phi = \tilde{m}_0 \ln \frac{L' - y + \left((L' - y)^2 + a'^2 \right)^{1/2}}{-L' - y + \left((L' + y)^2 + a'^2 \right)^{1/2}}, \quad (\text{Eq-5.40})$$

où

$$a'^2 = x^2 + (z - z_1)^2.$$

Ensuite, cette approximation en marche d'escalier est portée un cran plus loin en considérant chaque segment horizontal de longueur infinie. Le superpotentiel de la source est déduit de la limite de l'équation 5.40 quand L' tend vers l'infini. Au second ordre en $1/L'$, Φ s'écrit

$$\Phi \approx 2\tilde{m}_0 \left(\ln(2L') - \ln a' + (a'^2 - 2y^2) \frac{1}{4L'^2} + \frac{1}{L'^2} O\left(\frac{1}{L'}\right) \right), \quad (\text{Eq-5.41})$$

ce qui donne

$$\Phi \approx 2\tilde{m}_0 \ln(2L') - 2\tilde{m}_0 \ln a'. \quad (\text{Eq-5.42})$$

Puisque le superpotentiel n'est défini qu'à une constante additive près, seuls les termes dépendants des coordonnées sont conservés

$$\Phi = -2\tilde{m}_0 \ln \left(\sqrt{x^2 + (z - z_1)^2} \right). \quad (\text{Eq-5.43})$$

Pour vérifier cette expression, l'équation 2.66 permet facilement de déduire la fonction potentiel par dérivation oblique

$$U = 2\tilde{m}_0 \frac{lx + n(z - z_1)}{x^2 + (z - z_1)^2}. \quad (\text{Eq-5.44})$$

Ce résultat est bien identique au potentiel magnétique dû à une ligne horizontale infinie de dipôles (Smellie, 1956).

5.2.4.2 Signal analytique du superpotentiel

Le succès des méthodes utilisant les signaux analytiques pour localiser les sources d'anomalies magnétiques s'explique sans doute par le nombre réduit d'hypothèses nécessaires au calcul. L'idée du signal analytique est de transformer une carte, ou un profil d'anomalies magnétiques, afin d'éliminer le mieux possible la partie du signal liée à la direction du champ magnétique et de l'aimantation (Baala, 2005). Ainsi, par exemple, en cas de forte rémanence, la localisation sur le plan horizontal de la source peut être obtenue plus facilement par le calcul du signal analytique de l'anomalie que par la double réduction au pôle. Nabighian (1972, 1984) a proposé une définition du signal analytique associé à une fonction quelconque f à trois dimensions

$$A(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + i \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (\text{Eq-5.45})$$

Seul le module est généralement utilisé, Ofeogbu et al. (1990) ont déduit l'amplitude du signal analytique sous la forme d'une addition scalaire

$$|A(x, y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}. \quad (\text{Eq-5.46})$$

Cependant, si f est la fonction anomalie, l'allure de cette amplitude est fortement dépendante de l'orientation de la source par rapport à la grille de calcul. Roest et al. (1992) ont alors apporté une modification dans sa définition : ils ont proposé une addition vectorielle à la place d'une addition scalaire des dérivées du plan horizontal. L'amplitude du signal analytique revient simplement à prendre le gradient total de la fonction, cet opérateur H_{SA} est défini de la façon suivante

$$H_{SA}(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \quad (\text{Eq-5.47})$$

Ainsi, les maxima d'amplitude de cet opérateur calculé sur l'anomalie du champ total permettent d'estimer les contours de l'objet projetés dans le plan horizontal. De plus, les profondeurs des sources peuvent être obtenues à partir de la forme de la fonction (Roest et al., 1992) ou déduites du rapport de celle-ci avec ses dérivées plus élevées (Hsu et al., 1996, 1998 ; Bastani et al., 2001 ; Salem et al., 2002, 2003).

Par la suite, Hsu et al. (1996 ; 1998) ont généralisé la définition de l'amplitude du signal analytique à des ordres n entiers de dérivation. Ils ont proposé de dériver verticalement à l'ordre n chaque dérivation de l'espace afin d'augmenter la résolution de l'opérateur

$$H_{SA_n}(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}. \quad (\text{Eq-5.48})$$

Le plus souvent, cet opérateur généralisé est calculé sur l'anomalie du champ total ou bien sur les composantes du tenseur du gradient magnétique (Oruç, 2010). Salem et al. (2002) ont montré que même pour des structures simples, un dipôle par exemple, le maximum de l'amplitude du signal analytique n'est pas toujours à l'aplomb du point ; l'erreur de positionnement horizontal peut atteindre 30% de sa profondeur. Ainsi, pour des sources étendues, l'efficacité de l'opérateur peut fortement dépendre de la direction d'aimantation et dans la plupart des cas, ses maxima ne sont pas situés exactement sur les bords des structures.

Afin d'atténuer l'effet de la direction des aimantations, nous appliquons cet opérateur sur le superpotentiel magnétique et nous montrons comment la profondeur de la source peut être obtenue directement à partir du rapport de son maximum avec la composante Φ_{zz} du tenseur de l'anomalie magnétique, en un point directement au-dessus de la source.

5.2.4.3 Rapport du signal analytique du superpotentiel avec la composante zz du TAM

D'une part, nous calculons l'amplitude du signal analytique de Φ

$$H_{SA}(\Phi) = 2\tilde{m}_0 \sqrt{\left(\frac{x}{a'^2}\right)^2 + \left(\frac{z - z_1}{a'^2}\right)^2}. \quad (\text{Eq-5.49})$$

D'autre part, nous évaluons la troisième composante diagonale du TAM d'après la définition 2.82

$$\Phi_{zz} = 2\tilde{m}_0 \frac{x^2 - (z - z_1)^2}{a^4}. \quad (\text{Eq-5.50})$$

Les cartes des équations 5.49 et 5.50 sont représentées dans le plan horizontal à la figure 5.26.

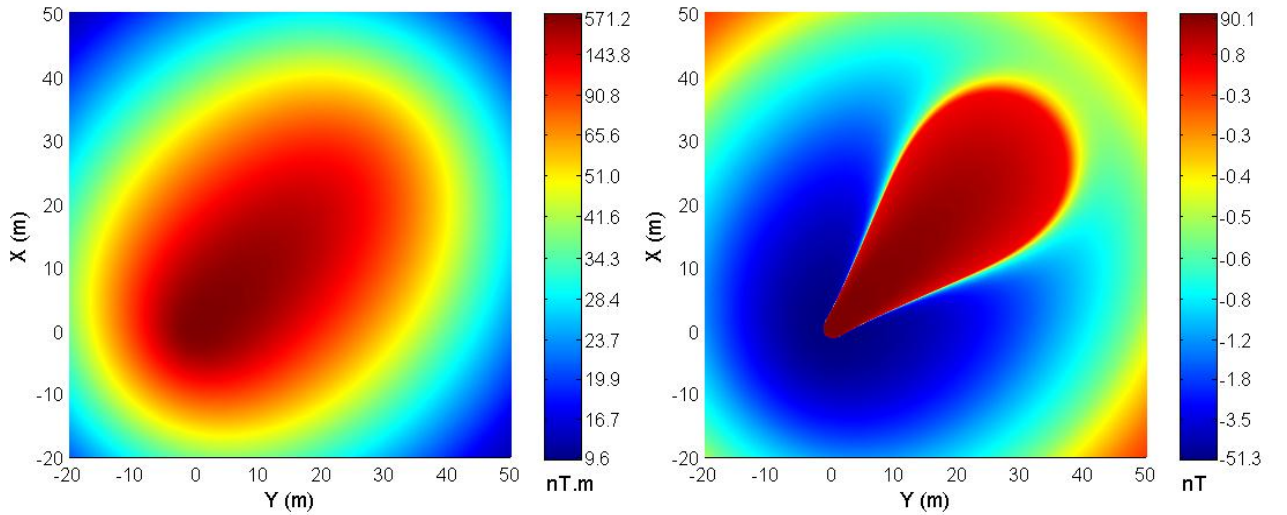


Figure 5.26 : Amplitude du signal analytique du superpotentiel (à gauche) et composante Φ_{zz} du tenseur (à droite) engendrés par la ligne de 20° de pendage et représentés en équipopulation de couleurs.

On en déduit les valeurs de l'amplitude du signal analytique et de la composante Φ_{zz} à l'aplomb de la ligne de dipôles dans le plan horizontal

$$H_{SA}(\Phi)|_{x=0, z=0} = 2 \frac{\tilde{m}_0}{z_1} \quad (\text{Eq-5.51})$$

et

$$|\Phi_{zz}|_{x=0, z=0} = 2\tilde{m}_0 \frac{1}{z_1^2}. \quad (\text{Eq-5.52})$$

Par conséquent, la profondeur d'un segment de sources dipolaires dont le centre est situé au point $(0,0, Z_1)$ peut être obtenue directement par le rapport

$$Z_1 = \frac{H_{SA}(\Phi)|_{x=0,z=0}}{|\Phi_{zz}|_{x=0,z=0}}. \quad (\text{Eq-5.53})$$

Notons que les maxima de ce rapport sont toujours situés directement à la verticale de la source, puisque le superpotentiel scalaire n'a pas de dépendance angulaire. Il en va de même pour son signal analytique et ses composantes tensorielles.

A l'étape suivante, la carte du rapport de l'équation 5.53 est représentée à la **figure 5.27**.

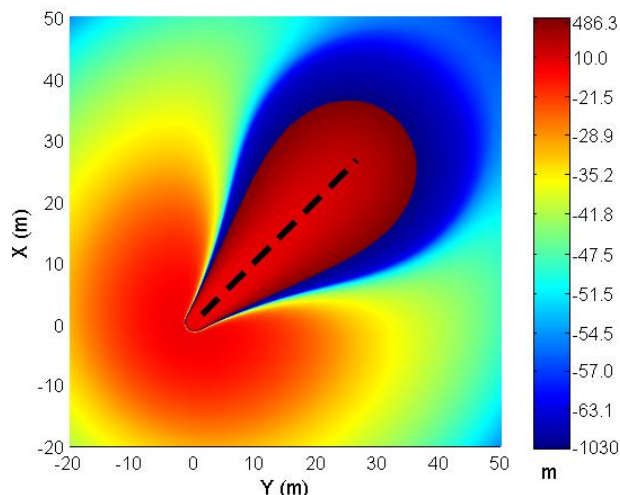


Figure 5.27 : Carte du rapport de l'amplitude du signal analytique du superpotentiel sur la composante Φ_{zz} du tenseur engendré par la ligne de 20° de pendage et représentée en équipopulation de couleurs. La ligne en pointillés représente la projection horizontale de la source.

A partir de cette carte, un profil de données est extrait à la verticale de la ligne plongeante ; ceci est représenté par la ligne en pointillés de la **figure 5.27**. Ces données de profondeur sont reportées par des cercles rouges dans le plan OxZ et représentées à la **figure 5.28**. Nous comparons ces profondeurs calculées avec la profondeur réelle de la source, représentée par un trait bleu.

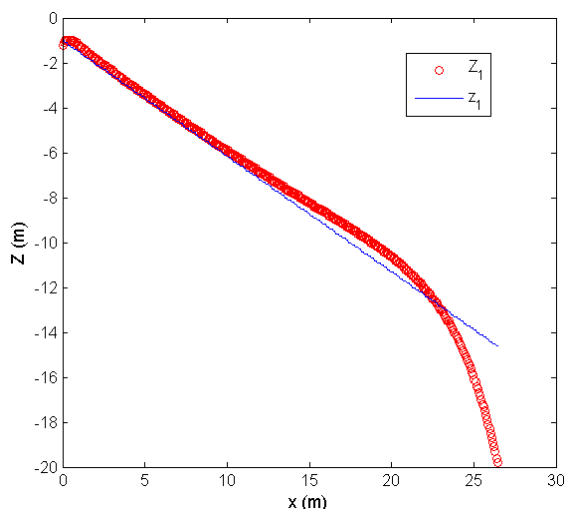


Figure 5.28 : Représentation dans le plan OxZ des profondeurs calculées (en rouge) et réelles (en bleu) basées sur le rapport des maxima du signal analytique et de Φ_{zz} au-dessus de la source.

La profondeur de chaque segment est estimée avec une bonne précision, sauf sur le bord profond du corps. À cet endroit, le signal magnétique dû au segment fini diffère du signal magnétique dû à la ligne infinie. Par contre, loin des bords de la source, les valeurs du rapport s'ajustent bien avec celles de la source réelle. Cela justifie, a posteriori, l'approximation de la ligne légèrement pentée par un modèle en marches d'escalier de segments quasi infinis. Nous avons vérifié numériquement que cette approximation reste valable pour des pendages inférieurs à 30° .

5.3 BILAN ET CONCLUSIONS

Nous avons prouvé l'existence physique du superpotentiel scalaire pour un corps quelconque au **chapitre IV** ainsi que son lien étroit avec le potentiel gravimétrique. Nous en avons déduit ainsi les relations profondes qui existent entre le tenseur magnétique et le tenseur du gradient gravimétrique. Cela a permis d'adapter dans le **chapitre V** des outils de traitement du **TGG** au **TAM** et d'en proposer de nouveaux. Nous avons pu ainsi prouver l'efficacité du superpotentiel et de son supertenseur dérivé à la fois pour la modélisation et l'inversion :

- En termes de modélisation, le calcul relativement simple du superpotentiel et de ses dérivées successives pour aboutir à l'anomalie illustre bien les améliorations substantielles apportées à méthode de Jain.
- En termes d'inversion, le calcul du déterminant du **TAM** et sa décomposition en élément propre ont permis de localiser les limites horizontales de la structure. De plus, une utilisation combinée de l'amplitude du signal analytique du superpotentiel avec la troisième composante diagonale du **TAM** a fourni une estimation de la profondeur de l'objet. Ces calculs étant effectués au même niveau de dérivation que le potentiel ou que l'anomalie, ils ont donc pour avantage d'être peu sensibles au bruit. Cet avantage nous conduit à appliquer cette méthode à de vraies données au chapitre suivant.

Chapitre VI

PROSPECTION AÉROMAGNÉTIQUE APPLIQUÉE À L'EXPLORATION DU BASSIN DE FRANCEVILLE

6.1	CONTEXTE GÉOLOGIQUE GÉNÉRAL DU FRANCEVILLIEN : SYNTHÈSE DES TRAVAUX ANTÉRIEURS.....	185
6.1.1	<i>Principales phases tectoniques affectant le Bassin de Franceville.....</i>	187
6.1.2	<i>Faciès et paléo-environnements des dépôts francevilliens</i>	187
6.1.3	<i>Structure du Bassin de Franceville</i>	190
6.1.4	<i>Distribution des minéralisations uranifères.....</i>	192
6.1.5	<i>Modèle génétique de l'uranium francevillien</i>	193
6.2	PROBLÉMATIQUE SCIENTIFIQUE DE L'ÉTUDE GÉOPHYSIQUE.....	195
6.2.1	<i>Prospection uranifère.....</i>	195
6.2.2	<i>Objectifs de l'interprétation des données aéromagnétiques</i>	195
6.3	LES DIFFÉRENTS LEVÉS AÉROMAGNÉTIQUES.....	197
6.3.1	<i>Contexte autour des données.....</i>	197
6.3.2	<i>Spécifications techniques des différents levés</i>	198
6.3.3	<i>Corrections appliquées aux données.....</i>	200
6.3.4	<i>Elaboration des grilles.....</i>	201
6.3.5	<i>Présentation des levés aéromagnétiques.....</i>	201
6.3.5.1	<i>Modèles Numériques de Terrain de la zone étudiée</i>	203
6.3.5.2	<i>Levés supra-bassinaux</i>	205
6.3.5.3	<i>Levés intra-bassinaux.....</i>	206

6.4	TRAITEMENTS STANDARDS ET INTERPRÉTATION DES CARTES	214
6.4.1	<i>Principes généraux de l'interprétation en méthode magnétique</i>	214
6.4.2	<i>Méthodes classiques d'interprétation</i>	215
6.4.2.1	<i>Réduction au pôle.....</i>	215
6.4.2.2	<i>Dérivations et intégrations.....</i>	217
6.4.2.3	<i>Prolongements verticaux.....</i>	217
6.4.2.4	<i>Inversion par la couche équivalente d'anomalie</i>	218
6.4.2.5	<i>Tilt angle</i>	219
6.4.2.6	<i>Filtrage directionnel</i>	220
6.4.2.7	<i>Modélisation 2D par la méthode de Talwani.....</i>	221
6.4.2.8	<i>Précaution d'usage autour des opérateurs de transformation</i>	222
6.4.3	<i>Interprétation magnétique des levés supra-bassinaux.....</i>	222
6.4.4	<i>Interprétation magnétique des levés intra-bassinaux</i>	223
6.4.4.1	<i>Zone occidentale de Mounana-Bangombé.....</i>	223
6.4.4.2	<i>Zone centrale de Mikouloungou-Kiéné</i>	230
6.4.4.3	<i>Zone orientale de Djokaye-Mopia.....</i>	232
6.4.4.4	<i>Bilan-conclusion.....</i>	233
6.5	TRAITEMENTS AMÉLIORÉS ET INTERPRÉTATION DES CARTES	233
6.5.1	<i>Zone centrale de Mikouloungou-Kiéné : Aspect multi-altitude</i>	233
6.5.1.1	<i>Prolongements verticaux.....</i>	234
6.5.1.2	<i>Signal analytique.....</i>	235
6.5.2	<i>Zone occidentale de Mounana-Bangombé.....</i>	238
6.5.2.1	<i>Superpotentiel et signaux analytiques.....</i>	238
6.5.2.2	<i>Tenseur de l'anomalie magnétique</i>	239
6.5.2.3	<i>Filtrage directionnel</i>	242
6.5.2.4	<i>Analyse matricielle du tenseur de l'anomalie magnétique</i>	243
6.5.3	<i>Bilan-conclusion.....</i>	248
6.6	BILAN ET CONCLUSIONS DE L'ÉTUDE GÉOPHYSIQUE	249

“ Que tout homme ait une terre, et que toute terre ait un homme. [...] Utilisez la nature, cette immense auxiliaire dédaignée. Faites travailler pour vous tous les souffles de vent, toutes les chutes d'eau, tous les effluves magnétiques. Le globe a un réseau veineux souterrain ; il y a dans ce réseau une circulation prodigieuse d'eau, d'huile, de feu ; piquez la veine du globe, et faites jaillir cette eau pour vos fontaines, cette huile pour vos lampes, ce feu pour vos foyers. Réfléchissez au mouvement des vagues, au flux et reflux, au va-et-vient des marées. Qu'est-ce que l'océan ? une énorme force perdue.”

Victor Hugo

Quatrevingt-Treize, Troisième partie, Livre septième, 1874

Chapitre VI : PROSPECTION AÉROMAGNÉTIQUE APPLIQUÉE À L'EXPLORATION DU BASSIN DE FRANCEVILLE

Le Bassin de Franceville se situe au Sud-Est de la République gabonaise en Afrique équatoriale. Ce bassin présente un triple intérêt scientifique. Il est connu dans le monde entier grâce à sa particularité unique de renfermer les réacteurs de fissions naturelles d'Oklo et de Bangombé (Gauthier-Lafaye et Weber, 1989 et 2003 ; Gauthier-Lafaye, 1996). La découverte récente de macro-organismes multicellulaires fossilisés dans des roches argileuses riches en matière organique (El Albani et al., 2010) a renforcé sa notoriété. Enfin, ses ressources minières (uranium et manganèse) intéressent de près les sociétés d'exploration géophysique (COMUF, COMILOG, ERAMET, AREVA).

L'objet du paragraphe suivant est de constituer une brève synthèse des connaissances actuelles sur l'évolution géodynamique du bassin paléoprotérozoïque de la région de Franceville (Francevillien) pour comprendre la stratigraphie du bassin et la genèse des gisements uranifères. Nous expliquerons ensuite comment la gîtologie du minerai d'uranium peut être reliée à l'existence d'anomalies magnétiques. Ces indications orienteront l'exploitation des données aéromagnétiques disponibles sur la zone. L'utilisation conjointe d'outils classiques de traitements de cartes et d'outils nouveaux développés au **chapitre V** sera mise à profit pour établir une nouvelle cartographie des cibles potentiellement uranifères dans le Bassin de Franceville.

6.1 CONTEXTE GÉOLOGIQUE GÉNÉRAL DU FRANCEVILLIEN : SYNTHÈSE DES TRAVAUX ANTÉRIEURS

Le bassin sédimentaire de Franceville couvre une superficie d'environ 42 000 km². Il est structuré par un ensemble de sous-bassins en chapelets plus ou moins communicants : Booué, Lastourville, Okondja et Franceville. La formation de ce bassin est datée autour du paléoprotérozoïque de 2,1 Ga \pm 30 Ma (Hoori et al., 2005). C'est un des rares bassins de la planète à posséder des séries sédimentaires d'un âge aussi reculé et qui n'ont pas encore été métamorphisées. Comme l'illustre la **figure 6.1**, il est limité, au Nord et au Sud respectivement,

par les massifs cristallophylliens du Nord Gabon (gneiss) et du Chaillu (granitoïdes), à l'Ouest par le système de l'Ogooué et à l'Est par les formations continentales mésozoïques de la ceinture congolaise. L'ensemble des ces formations appartiennent au super groupe cratonique congolais.

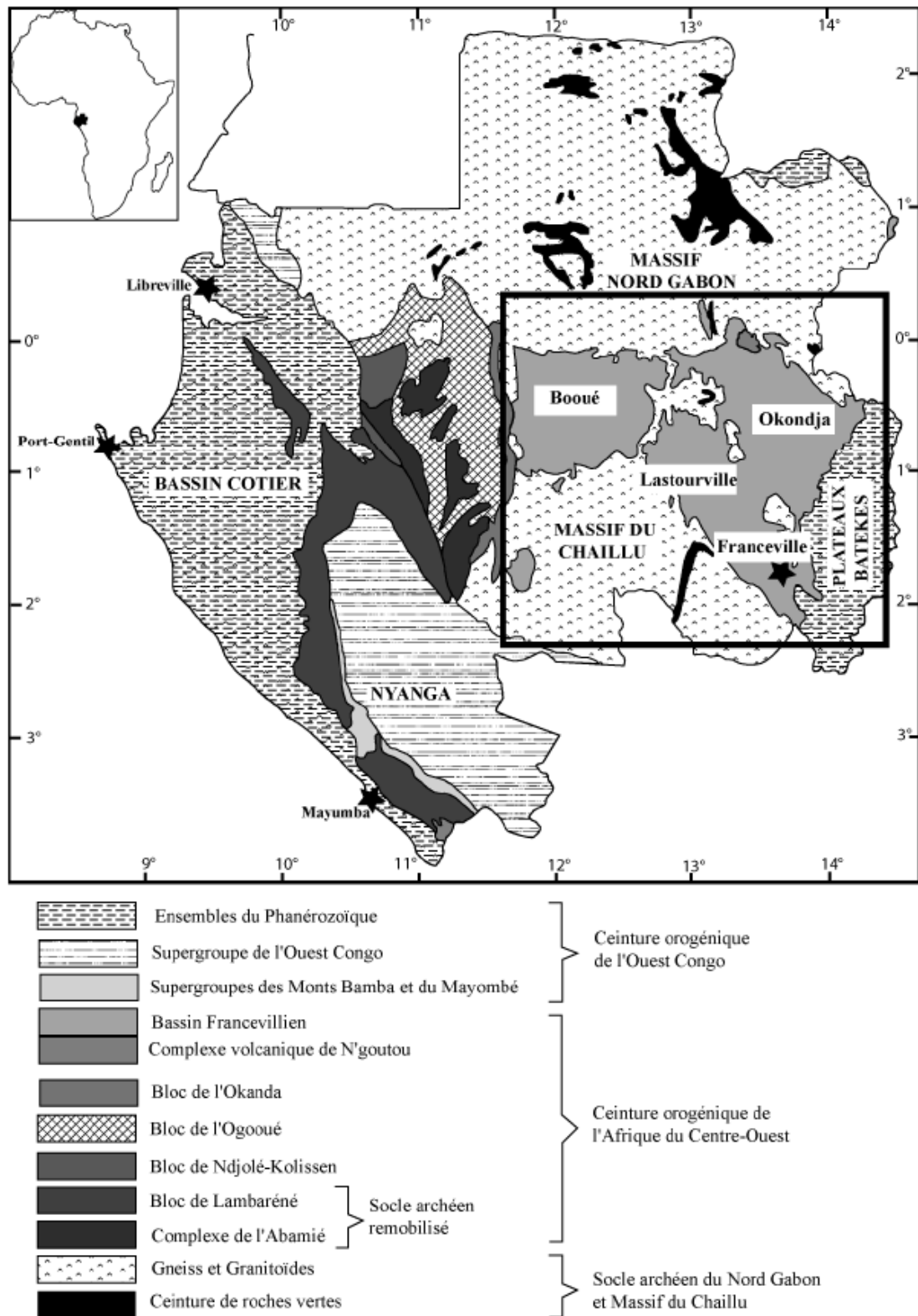


Figure 6.1 : Cadre général du Bassin de Franceville (modifiée d'après Chevallier et al., 2002).

La colonne lithostratigraphique du bassin est discordante sur un socle Archéen de 2,7 Ga d'années. Elle se subdivise en cinq formations sédimentaires, allant du FA au FE (Weber, 1968), en excellent état de conservation et détaillées au **paragraphe 6.1.2**. Actuellement, sa puissance totale ne dépasse pas 4000 m dans les zones les plus profondes du bassin (Weber, 1969).

6.1.1 Principales phases tectoniques affectant le Bassin de Franceville

L'histoire géodynamique du Francevillien non métamorphique a été décomposée en trois phases principales d'inégales ampleurs par Gauthier-Lafaye (1986). Ces phases sont associées à des événements volcaniques et sédimentaires, elles ont été détaillées par Ledru et al. (1989) puis par Feybesse et al. (1998).

La **première phase** correspond à la formation du bassin et à son comblement par des grès et des conglomérats. Sa subsidence maximale se limite aux couloirs de fractures NO-SE correspondant aux bassins de Lastoursville-Franceville et au bassin d'Okondja. Les dépôts du FA se mettent en place dans des zones subsidentes dont la géométrie est contrôlée par de grands accidents NO-SE et N-S. C'est dans les dépôts de cette première phase que se situent tous les gisements d'uranium du Francevillien.

La **deuxième phase** est une phase extensive d'affaissement créant des fossés d'effondrement en horsts et grabens subsidents, étroitement contrôlés par les couloirs de fractures NO-SE et N-S. C'est cette phase qui provoque l'individualisation des bassins de Lastoursville et d'Okondja. Le comblement de ces nouveaux bassins par les dépôts FB et FC d'origine essentiellement marine (pélites, ampélites et dolomies) est principalement contrôlé par ces couloirs de fractures.

La **troisième phase** se marque par une extension des aires subsidentes à tout le bassin francevillien. Cette phase se traduit également par un important volcanisme acide. Le bassin est alors uniformément recouvert par les dépôts volcano-sédimentaires FD et FE.

6.1.2 Faciès et paléo-environnements des dépôts francevilliens

Le Bassin de Franceville se compose d'une colonne lithostratigraphique à cinq formations, allant du FA au FE. Cette colonne a été établie et décrite par Weber (1968 et 1969) ; elle est synthétisée à la **figure 6.2**. Des travaux complémentaires liés à son importance métallogénique

dans le FA (uranium) et dans le FB (manganèse) ont permis de détailler certains faciès et de les subdiviser en sous-unités (Haubensack, 1981 ; Gauthier-Lafaye, 1986 ; Azzibrouck, 1986 ; Gauthier-Lafaye et Weber, 1989 ; Pambo, 2004 ; Ossa Ossa, 2010). Ces points particuliers seront à peine effleurés dans la description suivante.

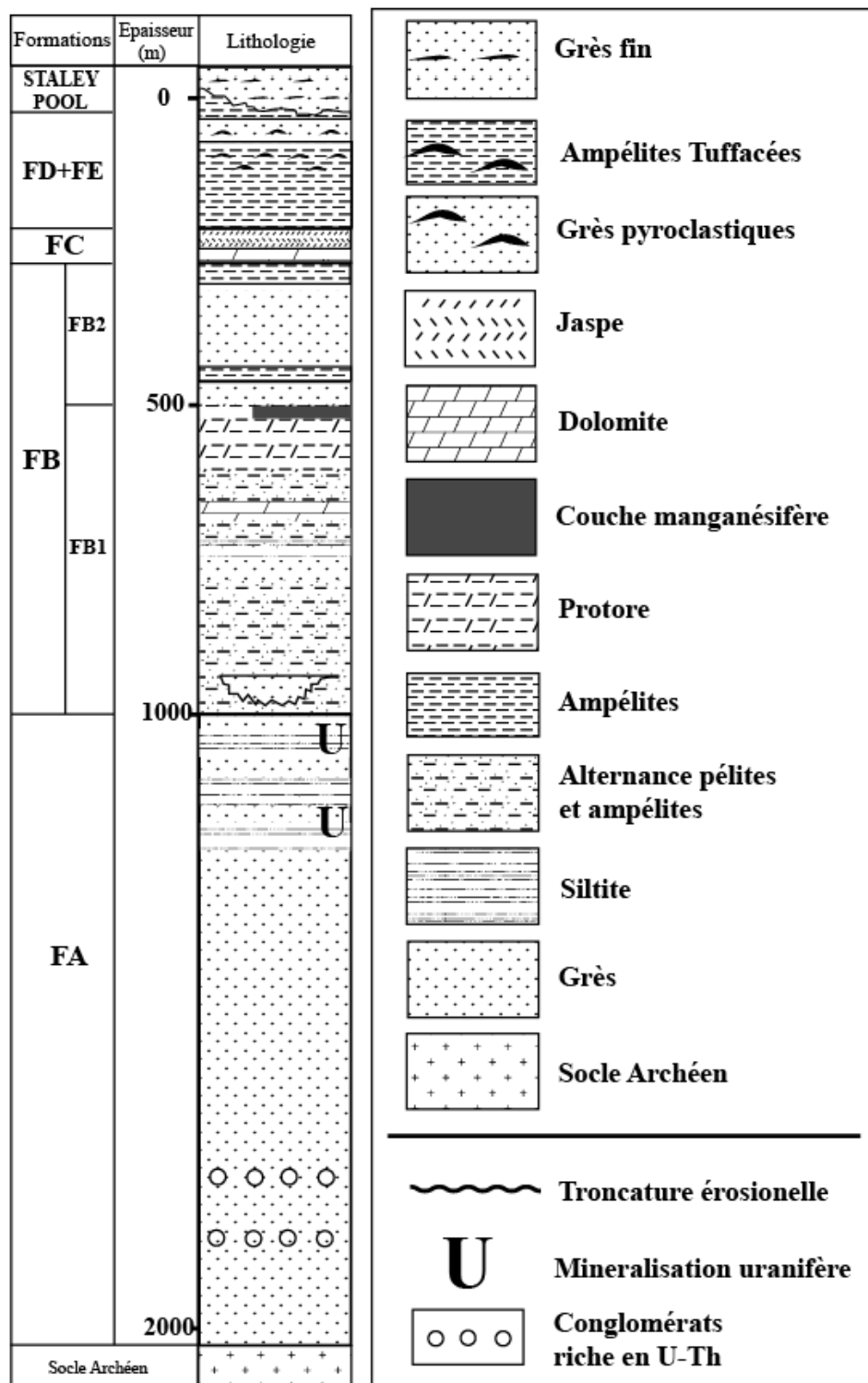


Figure 6.2 : Coupe lithostratigraphique simplifiée du Francevillien (modifiée d'après Weber, 1968).

Le Francevillien A (FA)

Cette formation la plus basse, reposant sur le socle archéen, est principalement constituée des dépôts continentaux grès-conglomératiques d'origine fluvio-deltaïque. Un remplissage syn-tectonique du bassin s'est fait sur une épaisseur allant de 50 à 1000 m. Cette formation présente trois grands types de faciès :

- i. grès grossiers conglomératiques caractéristiques d'un environnement fluvial ;
- ii. grès moyens à fins parfois conglomératiques et pélitiques caractérisant un environnement deltaïque ;
- iii. grès fins pélitiques associés à un environnement sujet aux marées océaniques.

Le Francevillien B (FB)

La stratigraphie du FB est essentiellement constituée de schistes noirs, résultats de dépôts marins, côtiers et offshore. Elle constitue une série transgressive marine du cycle francevillien. Cette formation se subdivise en deux grandes unités. Le FB1, riche en carbone d'origine organique, est le résultat d'un épisode pélitique et ampélitique. Le FB2 est composé essentiellement de grès fins massifs, très silicifiés et oblongs de direction NNO-SSE (Azzibrouck, 1986). Le FB peut atteindre plusieurs centaines de mètres d'épaisseur et jusqu'à 1000 m dans la partie centrale du bassin.

Notons que les formations de base FA et FB atteignent leur puissance cumulée maximale (supérieure à 1000 m) dans le Bassin de Franceville. Cette forte sédimentation est due à un effondrement tectonique de la zone. Nous verrons, par la suite, en quoi cela explique la présence de tous les gisements uranifères connus dans ce bassin.

Les formations supérieures du Francevillien (FC, FD et FE)

La formation FC est caractérisée par une sédimentation chimique marine et volcanique peu profonde constituée de jaspe et de dolomie parfois interstratifiés par des ampélites. Ce dépôt de 40 m de puissance marque la fin du remplissage détritique.

La formation FD, de 30 à 110 m de puissance, est caractérisée par des dépôts volcano-sédimentaires où dominant les ampélites (milieu marin) et les schistes noirs assez siliceux. C'est

dans cette formation que s'intercalent des faciès volcaniques, preuve d'un épisode volcanique acide marqué.

La formation FE très hétérogène correspond à la réinstallation d'une sédimentation détritique et à une phase ultime de comblement du bassin sur une centaine de mètres d'épaisseur. Elle est caractérisée par des grès alternant avec des pélites et ampélites silteuses.

6.1.3 Structure du Bassin de Franceville

Un examen de la carte structurale établie par Gauthier-Lafaye (1986) et représentée à la **figure 6.3** montre dans l'ensemble une tectonique cassante. Le bassin du Francevillien est structuré par deux couloirs principaux de fractures d'orientation N-S et NO-SE s'infléchissant E-O. Celles-ci sont le résultat d'une histoire tectonique longue et complexe qui précède ou qui est contemporaine des prémices de la sédimentation francevillienne. En effet, la première phase extensive décrite au **paragraphe 6.1.1**, a affecté tout le craton congolais en le déformant selon la direction NO-SE. Les accidents subméridiens seraient le résultat d'une déformation sous décrochement (Gauthier-Lafaye, 1986). Ces deux directions d'accidents sont réactivées plus tardivement en failles inverses ou décrochantes lors de la compression E-O liée à l'orogène Ogooué.

Accidents tectoniques NO-SE

Les accidents NO-SE affectent l'ensemble du bassin et constituent la direction Francevillienne privilégiée. Sur la carte structurale de la **figure 6.3**, on dénombre six accidents majeurs du Nord au Sud : Yéyé-Kaya-Kaya relayé à l'est par la fracture de Djokaye ; Léboka et Magna ; Mounana ; Okouma-Bangombé relayé par les accidents de Bangombé-Mambala et Mikouloungou ; M'Bersé-Djokoroundja et enfin dans la partie la plus méridionale Mamba. Dans la suite de notre étude, nous nous intéresserons plus particulièrement à la zone Nord Ouest de Mounana et Bangombé au niveau de la dépression bordière de M'Bersé-Bangombé. Elle est limitée au Sud Ouest par la faille de Lekolo et au Nord Est par les failles d'Okouma-Bangombé et Bangombé-Mambala. Elle possède un potentiel uranifère intéressant.

Accidents tectoniques N-S

Sur la carte structurale de la **figure 6.3**, on peut recenser quatre grandes failles N-S dans la zone du bassin : à l'est les failles en relais d'Ondili et l'accident d'Andjogo ; au centre la faille de Miyama ; à l'ouest, les failles en relais de Mounana-Nord-Léyou et Mounana-Lékédi.

L'essaïm de filons

Parmi toutes les structures N-S importantes s'ajoutent de très nombreux filons plurikilométriques remplis de roche magmatique à texture doléritique, traversant tout le Bassin de Franceville et recoupant les accidents précédents. Ces grands couloirs appartiennent tous à la même histoire tectonique décrite au **paragraphe 6.1.1** : ils ont probablement été ouverts lors de la première phase (extensive) puis remplis pendant la troisième (épisode volcanique), il y a 1 Ga (Gauthier-Lafaye, 1986). Ces grands linéaments se ramifient en une multitude de petits filons, au remplissage identique, de directions E-O à ENE-OSO.

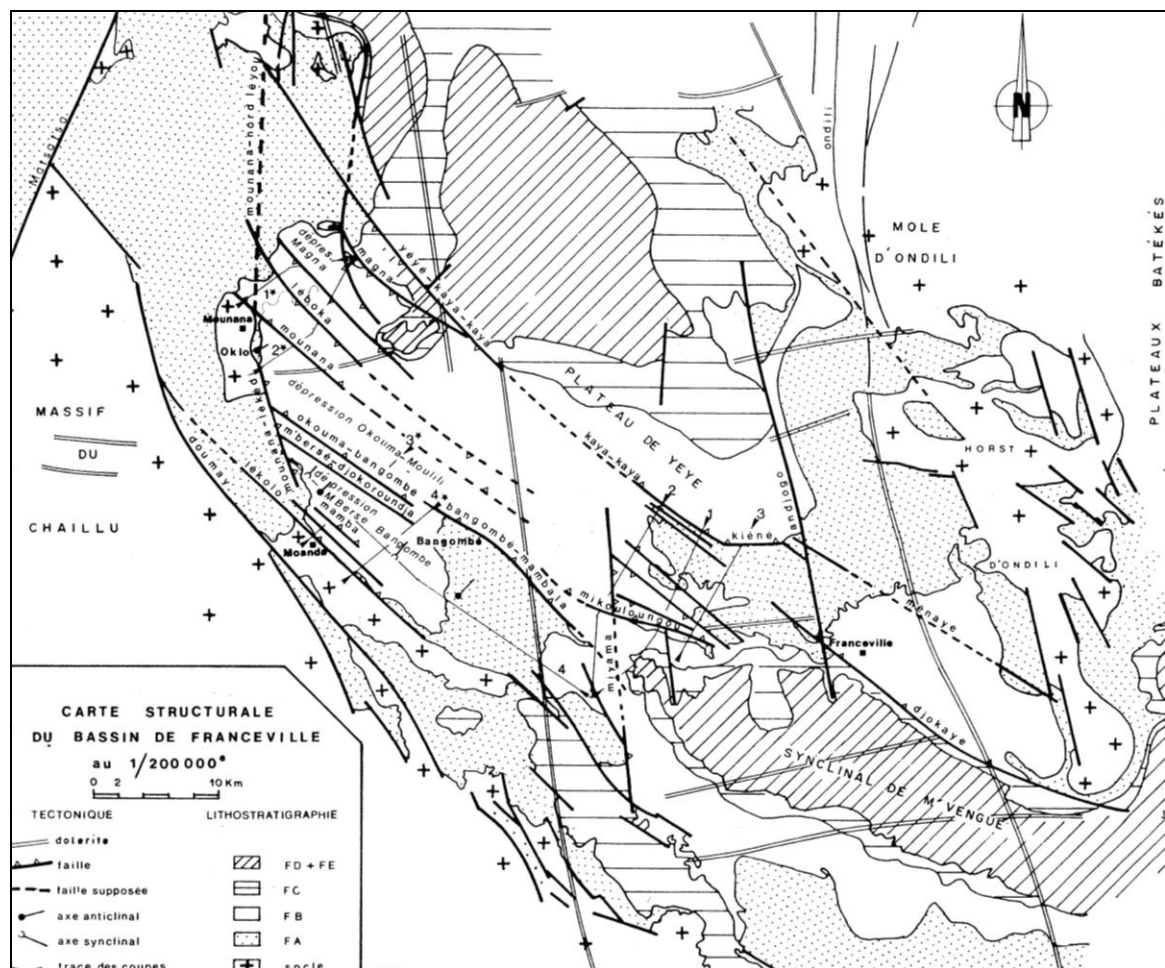


Figure 6.3 : Carte structurale du Bassin de Franceville (Gauthier-Lafaye, 1986).

6.1.4 Distribution des minéralisations uranifères

Les minéralisations uranifères ont été découvertes dans la formation FA. Le potentiel uranifère est important dans le Bassin de Franceville. Il est réparti sur trois zones géographiques comme l'illustre la **figure 6.4** :

- i. Mounana en bordure du bassin,
- ii. Mikouloungou au centre du bassin,
- iii. Plateau de Bangombé en position intermédiaire.

Dans ces trois secteurs, l'uranium se répartit de façon inégale. Le secteur le plus riche est la zone occidentale du bassin où se localisent les gisements de Boyindzi, Mounana et Oklo-Okélonbondo. La zone centrale contient des petits gisements (Mikouloungou et Otober) alors que la zone intermédiaire est plus riche en manganèse (Azzibrouck, 1986).

Entre 1961 et 1999, environ 26000 tonnes d'uranium d'une teneur allant de 0,1 à 50 %, ont déjà été exploitées dans le bassin. Il resterait aujourd'hui environ 12000 tonnes de minerais à 0,4% (Mathieu, 2006).

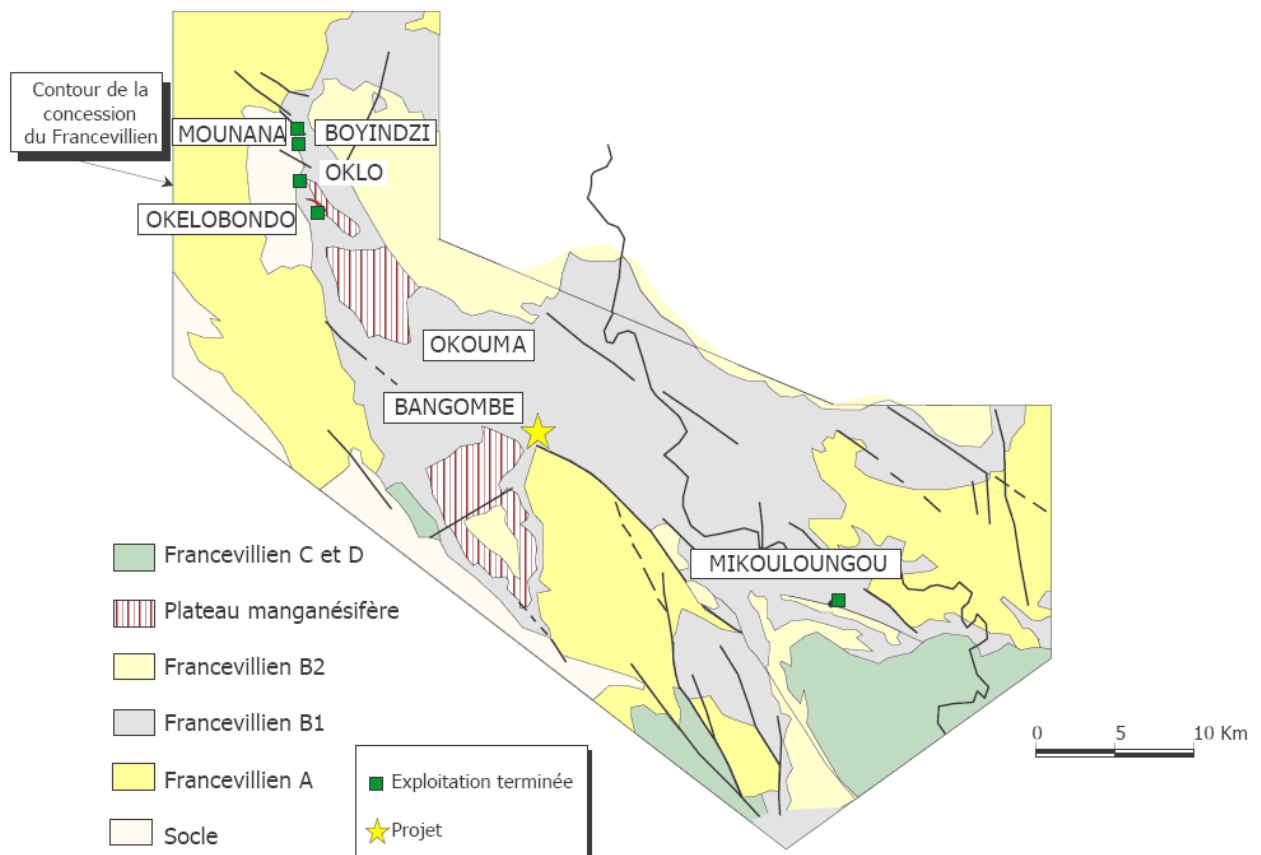


Figure 6.4 : Gisement d'uranium dans le Bassin de Franceville (modifiée d'après Matthieu, 2006).

6.1.5 Modèle génétique de l'uranium francevillien

Les modèles métallogéniques actuellement retenus invoquent deux facteurs principaux pour mobiliser l'uranium dans la série francevillienne. En effet, ces gisements sont caractérisés par des accumulations à contrôle à la fois sédimentaire et géodynamique.

Contrôle sédimentaire

Ce facteur a permis la mise en place d'uranium syn-sédimentaire aux interfaces entre le FA gréseux et oxydant et le FB pélitique et réducteur. En effet, Gauthier-Lafaye (1986) et Mathieu et al. (2001) proposent que l'uranium - sous sa forme oxydée (U-VI) - soit libéré des minéraux détritiques du FA sous l'action de saumures ascendantes et oxydantes provenant de l'érosion du socle archéen lors de l'évolution diagénétique du bassin. Ensuite, comme l'illustre le schéma métallogénique de la **figure 6.5**, ces fluides uranifères auraient rencontré les hydrocarbures issus de la matière organique des schistes noirs du FB. Ces hydrocarbures auraient joué le rôle d'agent réducteur et auraient permis de faire précipiter les oxydes d'uranium sous forme de UO_2 dans ces pièges de type pétrolier situés à l'interface FA-FB (Gauthier-Lafaye, 1986 ; Cortial et al., 1990 ; Nagy et al., 1991, 1993 ; Mossmann et al., 2005 ; Salze, 2008).

Contrôle géodynamique

Ce second facteur se décline en deux effets. Le premier, d'échelle bassinale, a entraîné de puissants dépôts FA et FB dans le Bassin de Franceville lors d'une phase distensive FA – FB, non observée dans les trois autres sous-bassins. Ces puissants dépôts ont alors augmenté la quantité d'uranium mobilisable dans la zone de Franceville. Ces dépôts sont d'autant plus importants que le socle est effondré.

Le deuxième effet, d'échelle plus locale, a créé des pièges structuraux le long de certaines failles. Par exemple, les failles telles que celles de la zone de Mikouloungou (Gauthier-Lafaye et Weber, 1989) ont servi de piège à hydrocarbure expulsé de la formation FB, sur lesquels s'est ensuite précipité l'uranium contenu dans les fluides diagénétiques. Ces pièges sont situés en position haute du fait de la densité relativement faible des hydrocarbures, comme l'illustre la **figure 6.5**.

Ces facteurs tectoniques seront très utiles par la suite. Nous y reviendrons plus en détail au **paragraphe 6.2.2**.

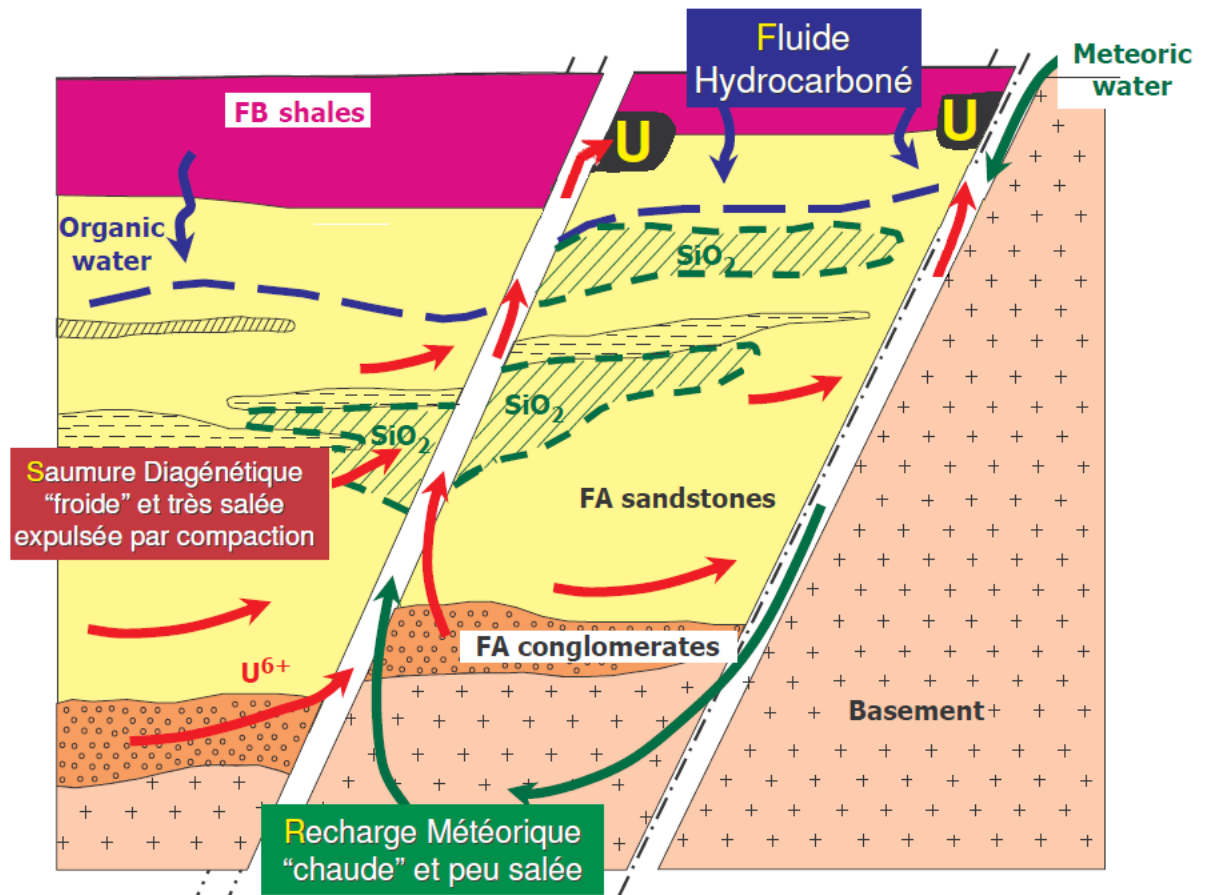


Figure 6.5 : Modèle métallogénique de l'uranium Francevillien (modifiée d'après Matthieu, 2006).

6.1.6 Bilan

L'histoire de la mise en place du bassin francevillien se résume en trois grandes phases :

- i. Ouverture du bassin pendant laquelle s'enregistrent les dépôts fluviatiles à fluvio-deltaïques (FA) ;
- ii. Effondrement créant rifts et grabens suivi par le comblement d'une sédimentation marine (FB) ;
- iii. Subsidence généralisée suivie d'une série de dépôts hétérogènes et accompagnée d'un volcanisme acide (FC à FE).

Le contexte géologique étant esquissé, nous nous attèlerons dans les sections suivantes à compléter ce panorama par une étude géophysique du Bassin de Franceville.

6.2 PROBLÉMATIQUE SCIENTIFIQUE DE L'ÉTUDE GÉOPHYSIQUE

6.2.1 Prospection uranifère

Le minerai d'uranium, ainsi que ses descendants naturels (radium, radon, etc.), offrent la particularité intéressante d'être radioactifs. Par conséquent, la méthode directe pour découvrir ce minerai est basée sur la détection des émissions alpha, beta et gamma. Historiquement, l'instrument utilisé était un compteur Geiger-Müller, aujourd'hui supplanté par les spectromètres gamma. Cependant, dans de nombreux cas ces instruments se révèlent inutilisables car ces émissions ionisantes sont absorbées presque totalement par des morts-terrains d'environ un mètre d'épaisseur (Roux, 1999). Pour découvrir les gisements plus profonds, il faut recourir aux méthodes géophysiques et géologiques classiques. Ces méthodes indirectes de prospection de l'uranium déplacent l'objet de la recherche vers une problématique plus large. Il s'agit, alors, de comprendre la géologie profonde du sous-sol, afin de rechercher des pièges potentiellement uranifères mais aussi la géologie de surface, par l'étude des affleurements. Suivant le type de piège et le contexte géologique, il faudra privilégier les méthodes électromagnétiques, sismiques ou bien potentielles. Rappelons que celles-ci sont rarement exclusives et que le plus souvent ces outils apportent des informations complémentaires sur le sous-sol.

6.2.2 Objectifs de l'interprétation des données aéromagnétiques

Nous avons rappelé au **paragraphe 1.1.2** que l'uranium porte un spin lui conférant des propriétés magnétiques. Cependant, sa teneur massique de l'ordre de 3 ppm à la surface de la Terre rend impossible toute détection magnétique directe du métal. Dans la suite du développement, nous utiliserons des données aéromagnétiques non pour détecter directement le minerai mais pour rechercher des objets géologiques potentiellement uranifères, présentant un contraste de susceptibilité.

L'étude géologique menée au début du chapitre nous a permis de montrer en quoi la localisation des gisements d'uranium du Bassin de Franceville était à la fois le résultat d'un contrôle sédimentaire et structural.

Toutefois, l'uranium syn-sédimentaire situé à l'interface entre les grès du FA et les pélites du FB ne pourra pas être détecté directement par un contraste de susceptibilité. En effet, les susceptibilités

sont comprises entre -10.10^{-6} et 10.10^{-6} SI pour les grès (Callot et al., 2010) et entre 20.10^{-6} et 80.10^{-6} SI pour les pélites (Vologina et al., 2010). Cependant, la sédimentation du FA, de nature principalement fluviatile, atteint sa puissance maximale en bordure Ouest du bassin, limitée par les boutonnières de socle. C'est dans cette zone que se situent aujourd'hui les principaux gisements (Oklo, Okélonbondo, Mounana et Boyindzi) comme l'illustre la **figure 6.4**.

L'uranium syn-tectonique se concentre dans les couloirs de fracturation gréseux perméables qui constituent de véritables drains pour les solutions uranifères. Ces drains tectoniques ont probablement joué un rôle majeur dans le déclenchement des réactions de fission naturelle à Oklo. Par ailleurs, les phases tectoniques ont aussi modifié la topographie du socle et celle des remplissages gréseux pour former des pièges structuraux dans des zones privilégiées, en particulier en position haute.

Ces deux effets tectoniques ont concentré des minéralisations uranifères et ont localement constitué des indices d'uranium intéressants (Lekedi-M'Bersé, Bangombé, Mambala).

Par conséquent, notre interprétation des données aéromagnétiques sera orientée autour de deux fils directeurs, afin d'évaluer plus précisément le potentiel uranifère de la région :

- i. Mieux appréhender les grandes unités lithologiques, en particulier estimer la géométrie du toit du socle et rechercher les points hauts de sa topographie. En effet, celui-ci détermine en partie la structuration du bassin et donc la topographie de l'interface FA-FB
- ii. Mieux caractériser les principales directions tectoniques du bassin, et notamment localiser les grands couloirs de failles NO-SE en tant que drains potentiels de circulation de fluide minéralisateur. Signalons que les filons de dolérite présentent une perméabilité beaucoup trop faible pour jouer le rôle de drains.

Pour chacun de ces deux points, il faudra composer avec une difficulté spécifique :

- i. Rappelons que la mesure aéromagnétique intègre l'information magnétique provenant aussi bien du socle que de sa couverture. Il faudra donc exploiter la donnée de grande longueur d'onde pour caractériser la structuration en profondeur.
- ii. Il faudra s'affranchir du signal magnétique des filons de dolérite N-S et E-O qui masque le signal des directions obliques potentiellement uranifères.

Dans la **section 6.4** nous appliquons d'abord les traitements dits « *standards* » des méthodes magnétiques. Puis, afin d'illustrer les nouveaux développements théoriques des chapitres précédents, nous complétons cette étude à la **section 6.5** par l'utilisation de traitement dits « *améliorés* » offrant des éléments nouveaux pour la compréhension de la structure du bassin.

Dans ces deux sections, nous nous emploierons à appliquer un traitement multi-fréquentiel : l'étude des basses fréquences pour caractériser le socle aimanté et des hautes fréquences pour rechercher les grands couloirs de failles.

Avant cela, nous commençons par dresser un panorama des différents levés aéromagnétiques à notre disposition sur la zone d'étude.

6.3 LES DIFFÉRENTS LEVÉS AÉROMAGNÉTIQUES

6.3.1 Contexte autour des données

Les données géophysiques nous ont été fournies par AREVA NC et ont été acquises selon le cas par la Compagnie Générale de Géophysique, par *Geotech Airborne Surveys Ltd* ou bien par *Airborne Petroleum Geophysics Ltd*. La zone étudiée s'étend de 13,0° à 14,1° de longitude Est et de -2,0° à 0,1° de latitude Nord. Nous nous limiterons aux données magnétiques mais selon la campagne, d'autres méthodes géophysiques ont été mises en œuvre : aérogravimétrie, spectrométrie gamma et mesures VTEM. Les données magnétiques se présentent toutes sous forme d'un fichier *.gdb*, format utilisé par le logiciel *Geosoft* pour les bases de données. Elles sont repérées par un système UTM local et exprimées en mètres. Cependant, pour des raisons de confidentialité, la localisation exacte des données ne figure pas dans ce manuscrit.

Les données m'ont été fournies le plus souvent avec un rapport décrivant en détail les opérations de terrain ainsi que toutes les étapes d'acquisition, de vérification et de traitement nécessaires pour l'obtention de données finales de qualité satisfaisante (Perrin, 2007 ; Geotech, 2008, 2009). L'objet de notre étude n'est pas de revenir ou d'améliorer ces prétraitements, mais bien d'appliquer les outils d'interprétation développés dans les chapitres précédents pour extraire de nouvelles informations géologiques des cartes aéromagnétiques.

6.3.2 Spécifications techniques des différents levés

Les spécifications des plans de vol pour chaque campagne aéroportée sont synthétisées au **tableau 6.1**. Celui-ci regroupe de *gauche* à *droite* : le nom et la date du levé, sa localisation, l'altitude de vol de l'appareil, la longueur cumulée des profils, les espacements entre les lignes de traverse et ceux entre les lignes de contrôle (ou de recoupe), les directions de chaque type de ligne, les inclinaisons et déclinaisons moyennes du champ géomagnétique calculées par l'IGRF et enfin le pas de la grille calculée après les corrections habituelles (décrites au **paragraphe 6.3.3**).

Bien que l'on soit très proche de l'équateur géographique, les latitudes de la zone étudiée étant comprises entre de -2° et 0.1° , l'inclinaison du champ reste inférieure à -30° . Par conséquent, l'équateur géomagnétique est suffisamment éloigné pour éviter les problèmes de calcul à faibles inclinaisons. Ces situations ont été abordées dans les **chapitres III** et **IV** pour des anomalies synthétiques.

Les vitesses de vol avoisinent 100 km/h (28 m/s) en hélicoptère sur les zones les plus accidentées et 200 km/h (56 m/s) pour les avions sur les autres zones. L'altitude de vol est généralement contrôlée par radar altimétrique.

Pour les levés postérieurs à 2007, l'instrumentation mise en œuvre pour la mesure magnétique est un magnétomètre embarqué à pompage optique utilisant les vapeurs de césium. Sa fréquence d'échantillonnage est de 10 Hz et sa résolution est garantie à 0.02 nT par le constructeur.

Nom et date du levé	Localisation	Altitude au dessus du sol (m)	Longueur totale (km)	Espacement (m)		Direction lignes de traverse	Direction lignes de contrôle	I (°)	D (°)	Pas de grille (m)
				Traverse	Contrôle					
CGG 83	Supra-bassinal	120	250 000	1000	10 000	N-S	E-O	-30	-3	500
AREVA 07	Supra-bassinal	160	75 000	250	2500	N-S	E-O	-30	-3	160
AREVA 0508	Mikouloungou	70	2987	400	4000	32°-212°	122°-302°	-31	-3	200
	Djokaye Mopia	70	3029	400	4000	32°-212°	122°-302°	-31	-3	200
AREVA 0408	Mikouloungou	400	2988	400	4000	32°-212°	122°-302°	-31	-3	200
AREVA 09	Mounana Bangombé	70	3339	400	10 000	32°-212°	122°-302°	-31	-3	200
	Mikouloungou Kiéné Nord	70	967	400	4000	32°-212°	122°-302°	-31	-3	200
	Mikouloungou Kiéné Sud	70	679	400	4000	32°-212°	122°-302°	-31	-3	200

Tableau 6.1 : Synthèse des spécifications des levés aéroportés pour chaque campagne.

6.3.3 Corrections appliquées aux données

Après l'acquisition aéroportée, les données magnétiques ont été corrigées par le contracteur des effets de l'engin, puis subissent la chaîne classique de corrections (Luyendyk, 1997 ; Intrepid User Manual, 2011) :

- i. correction des variations diurnes du champ ionosphérique en soustrayant au champ mesuré les enregistrements magnétiques des stations au sol les plus proches (Reford, 1964),
- ii. correction de l'IGRF en soustrayant au champ mesuré les valeurs de champ données par l'IGRF au lieu, à l'altitude et à la date du levé (Finlay et al., 2010),
- iii. filtrage passe-bas des données pour atténuer les signaux magnétiques de haute fréquence liés par exemple au moteur de l'avion (Balsley, 1952),
- iv. minimisation des écarts des mesures magnétiques aux points de croisement entre les lignes de traverse et les lignes de contrôle (Green, 1983).

Cette dernière correction de nivellement (« *levelling* ») est souvent la plus délicate. Si elle est suffisamment poussée, elle permet de réduire les écarts aux points de croisement à quelques nT. Ces écarts sont attribués à divers facteurs comme les variations du champ de référence non prises en compte dans les deux premières corrections, ou bien des erreurs de positionnement, des changements d'altitude de l'appareil ou encore une prise en compte imparfaite des effets magnétiques de l'avion. Si à l'issue de ce traitement, un bruit lié aux ondulations du plan de vol persiste dans les données, on a recourt à une procédure de micro-nivellement (« *micro-levelling* ») ou « *décorrugation* » (Ferraccioli et al., 1998 ; Fedi et Florio, 2003). Cette procédure permet de renforcer la cohérence spatiale des données en éliminant les artéfacts repérables par des ondulations parallèle et en phase avec la position des lignes de vol. Ce traitement consiste à créer des grilles de travail orientées selon l'azimut de vol, puis de les soumettre à un double filtrage directionnel adapté aux caractéristiques du plan de vol. Ces filtres appliqués dans le domaine de Fourier sont destinés à rejeter :

- i. les longueurs d'onde inférieures à l'espacement des lignes de vol dans la direction perpendiculaire à l'azimut des lignes de traverse,
- ii. les longueurs d'onde supérieures à l'espacement des lignes de contrôle dans la direction des lignes de traverse.

Le résidu de filtrage constitue le défaut de nivellement, dont l'échantillonnage le long des lignes de vol donne le terme de correction en chaque point de mesure. Cette correction retranchée aux données originales permet d'obtenir les données micro-filtrées (« *micro-levelled data* »), prêtes à être maillées.

6.3.4 Elaboration des grilles

Les données magnétiques sont ensuite interpolées selon des cellules de maillage qui correspondent généralement à la moitié voire au quart de l'espacement entre les lignes de traverse. Cela dépend de la hauteur de l'appareil par rapport aux sources ainsi que des dimensions caractéristiques de ces dernières. Ces points seront discutés par la suite. Les calculs de grille sont basés sur les algorithmes de courbure minimale du logiciel *Oasis Montaj* (Briggs, 1974 ; Geosoft, 2011) ou du programme *gridfit* développé sous *Matlab* (D'Errico, 2010).

6.3.5 Présentation des levés aéromagnétiques

Nous disposons de huit levés aéroportés sur la zone d'étude du Bassin de Franceville dont les limites géographiques sont reportées sur les **figures 6.6** et **6.7**.

Parmi ces huit levés, deux dépassent très largement le bassin et couvrent le quart Sud-Est du territoire gabonais, leurs contours sont représentés respectivement en bleu et en noir sur ces deux figures. Les six levés restant sont situés dans le Bassin de Franceville :

- i. un levé dans la zone occidentale de Mounana-Bangombé, représenté en rouge ;
- ii. quatre levés dont deux à la même position dans la zone centrale de Mikouloungou-Kiééné, représentés en vert ;
- iii. un levé dans la zone orientale de Djokaye dans les environs de Mopia, représenté en bleu.

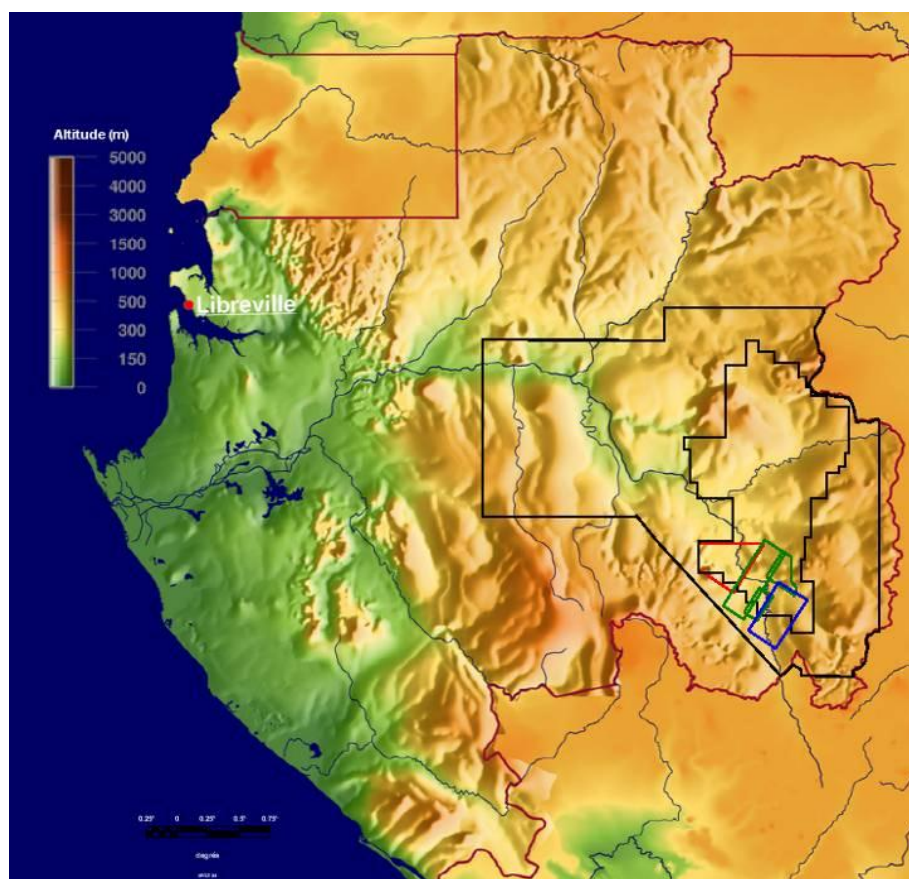


Figure 6.6 : Localisation générale des différents levés sur le territoire gabonais.

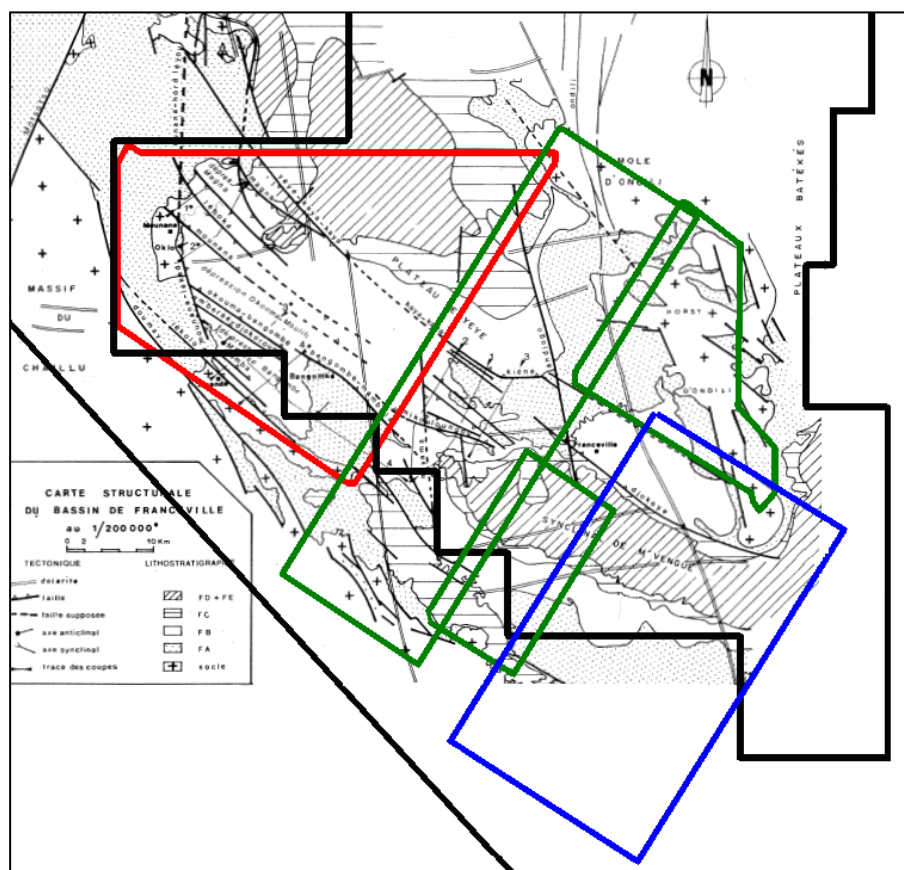


Figure 6.7 : Localisation des différents levés aéroportés d'AREVA NC superposés à la carte structurale du Bassin de Franceville établie par Gauthier-Lafaye (1986).

6.3.5.1 Modèles Numériques de Terrain de la zone étudiée

Avant d'entrer dans le cœur du sujet, il est intéressant de présenter le modèle numérique de terrain de la zone d'étude. Nous avons établi ce modèle numérique à partir des données altimétriques recueillies par la navette Endeavour (STS-99) lors de la mission *Shuttle Radar Topography* (SRTM) réalisée en février 2000. La résolution des données est garantie à 90 m par la NASA, elles sont téléchargeables sur le site <http://srtm.csi.cgiar.org/>. Ce modèle numérique de terrain peut présenter des corrélations intéressantes avec certaines structures du bassin.

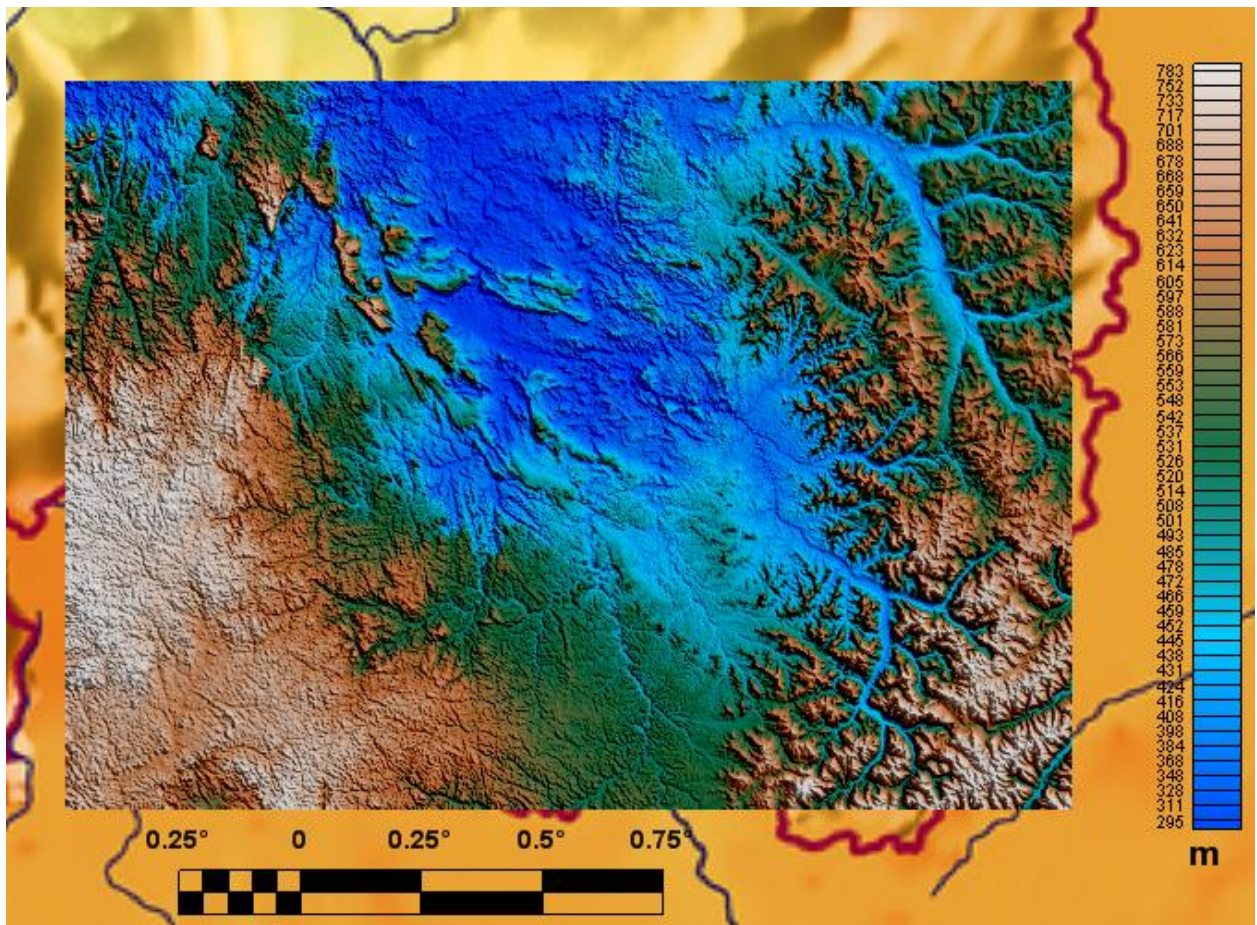


Figure 6.8 : Modèle numérique de terrain de la région du Bassin de Franceville.

Ce modèle de terrain sera utile, par la suite, pour l'interprétation des données de la région de Mounana-Bangombé. Nous extrayons les données altimétriques de cette zone à la **figure 6.9**.

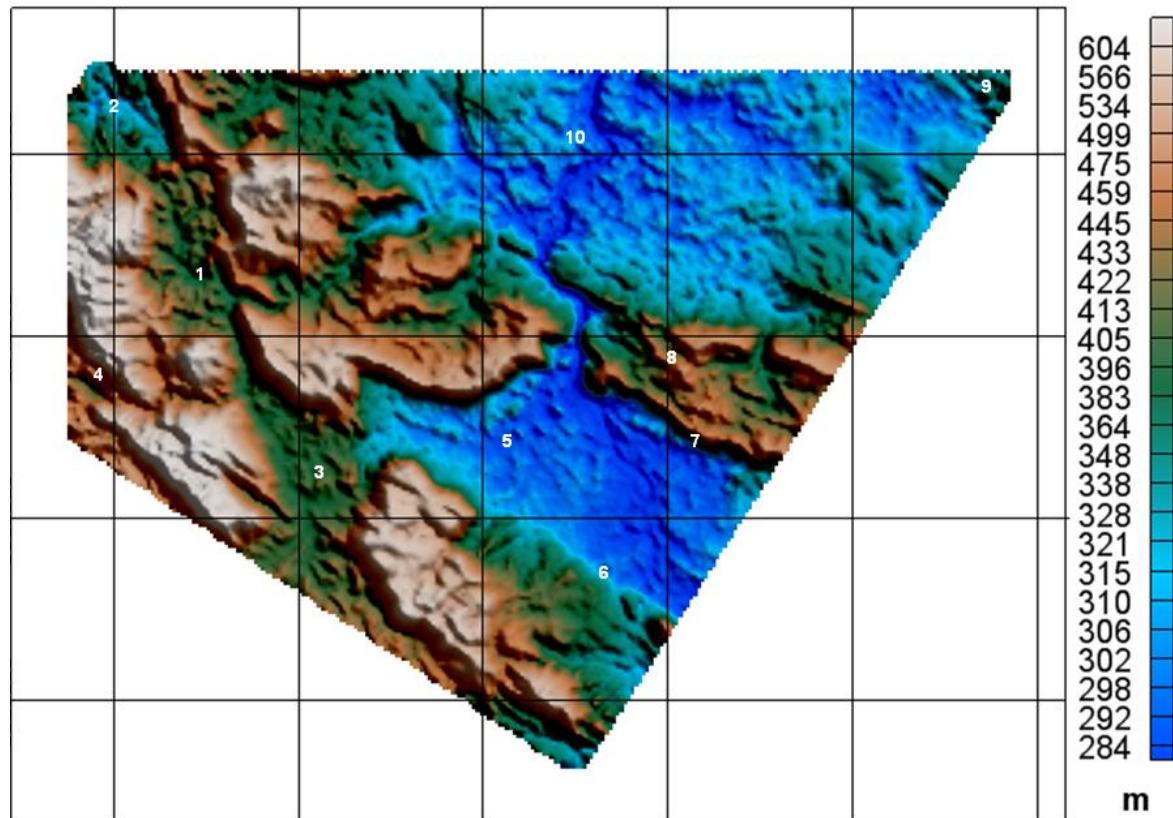


Figure 6.9 : Détail des données SRTM sur la zone correspondant à la campagne AREVA09 Mounana-Bangombé.

Cette zone de 1254 km² présente un dénivelé d'environ 300 m. Les structures majeures, numérotées de 1 à 10 sur la **figure 6.9**, sont décrites par Gauthier-Lafaye (1986) :

- i. L'accident NO-SE de Mounana Lékédi (1) dans la partie occidentale relie la dépression de Magna au Nord (2) à la dépression de M'Bersé-Bangombé au Sud (3). Cet accident structuré en horsts et grabens marque le plongement du socle de Chaillu (4) et la naissance du bassin vers l'Est.
- ii. La dépression de M'Bersé-Bangombé s'ouvre sur la grande dépression au Sud-Est d'Okouma-Moulili (5) limitée au Sud par les failles de Bangombé-Mambala (6) et au Nord par les failles de Kaya-Kaya (7).
- iii. La dépression d'Okouma-Moulili est interrompue au Nord par le plateau de Yéyé (8) puis le bassin remonte très progressivement vers le Nord-Est jusqu'au môle d'Ondili, en limite de carte (9).
- iv. Le filon majeur orienté N-S subparallèle au fleuve Ogooué (10).

6.3.5.2 Levés supra-bassinaux

Le plus étendu et le plus ancien des levés a été réalisé entre mai 1983 et février 1984 à la demande du Ministère des Mines, du Pétrole et des Hydrocarbures gabonais pour un inventaire géologique et minier du territoire. Ce levé de très grande envergure cumule 250 000 kilomètres de profils volés. Cette campagne a permis l'acquisition simultanée du magnétisme et de la spectrométrie gamma sur le quart Sud-Est du Gabon. Nous nous intéresserons uniquement aux données magnétiques qui ont été retraitées par le BRGM en 2005 dans le cadre d'un projet de coopération intitulé « *Appui à la relance des activités minières au Gabon* » cofinancé par le Fond d'Aide et de Coopération (FAC) et la Direction Générale des Mines et de la Géologie (DGMG) du Gabon pour une étude géologique et minière du Bassin de Franceville.

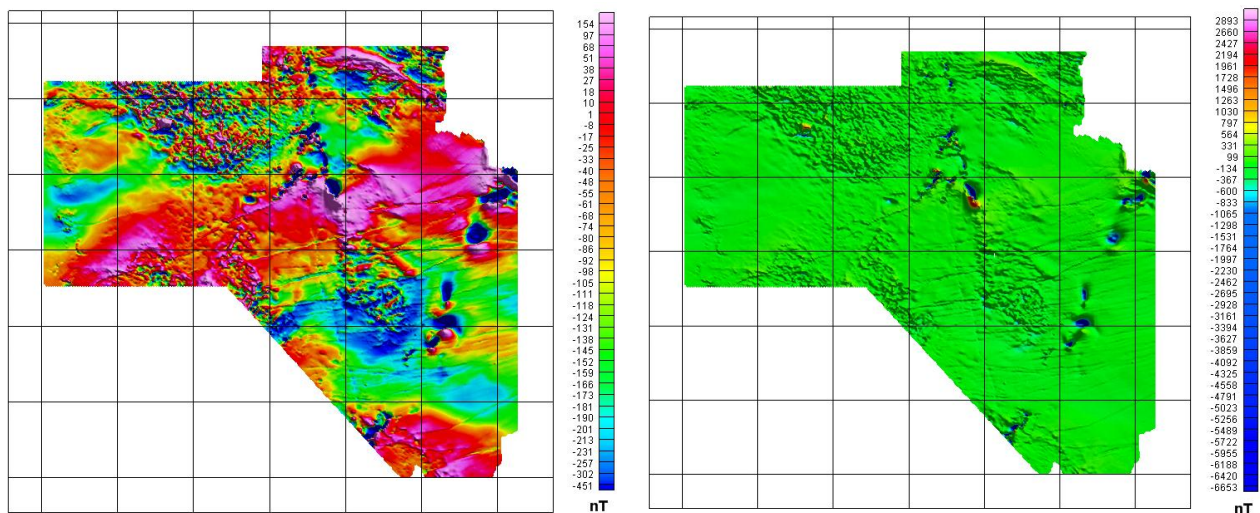


Figure 6.10 : Carte d'anomalie du champ total en équipopulation (à gauche) et en linéaire (à droite) CGG83.

Les variations d'amplitude des anomalies sont fortes, elles s'étalent de -6600 à 2900 nT environ. Mais la représentation en linéaire de la **figure 6.10** permet de montrer qu'il y a peu d'anomalies d'une telle amplitude. La plus importante est située au centre de la carte, et d'autres s'alignent selon un couloir NNO. Les autres anomalies ont une amplitude beaucoup plus faible allant de -450 à 150 nT.

L'autre levé supra-bassinal a été commandé par AREVA en 2007, il est deux fois moins étendu mais a été volé de façon quatre fois plus dense. Ce levé haute résolution, représenté à la **figure 6.11**, a permis d'affiner les résultats de la campagne précédente.

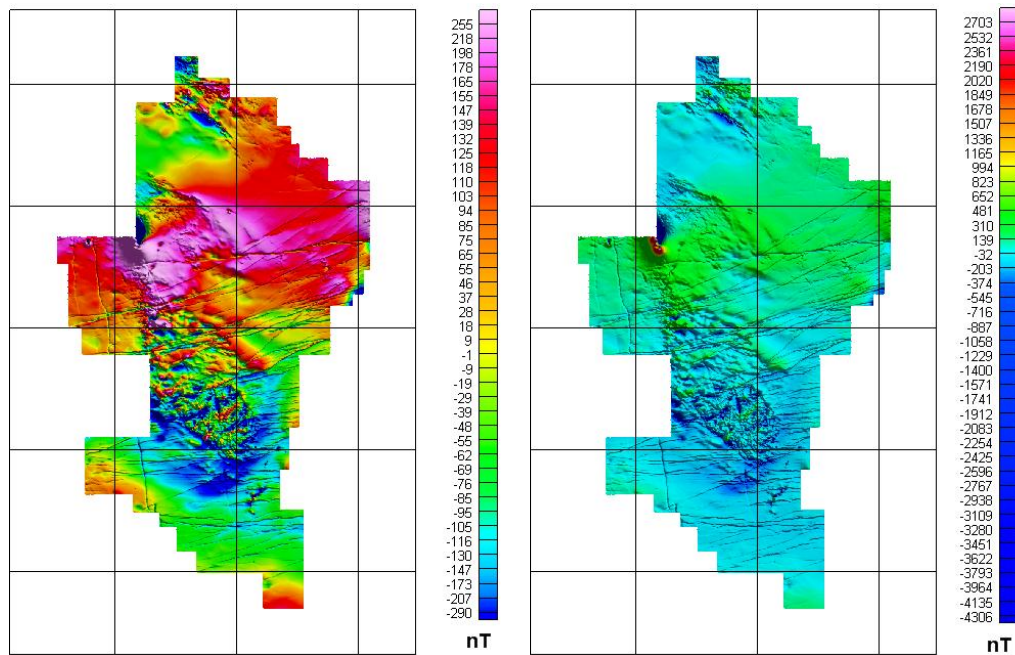


Figure 6.11 : Carte d'anomalie du champ total en équipopulation (à gauche) et en linéaire (à droite) AREVA07.

Compte tenu de la direction générale des structures géologiques connues sur cette zone, les lignes de vol ont été orientées N-S avec des lignes de recoupe E-O pour les deux levés précédents. La carte d'anomalie représentée à la **figure 6.11** en équipopulation fait apparaître un grand nombre de linéations de directions comprises entre N 60°E et N 80°E et quelques directions N 170°E, à l'Ouest. Nous appliquerons des opérateurs de transformation de carte pour mieux caractériser ces directions. Avant cela, nous présentons les autres données dont nous disposons, celles volées au-dessus du bassin.

6.3.5.3 Levés intra-bassinaux

Ces données ont été acquises plus récemment et visent à affiner les recherches sur les cibles potentiellement uranifères. La carte des gisements connus dressée à la **figure 6.12** indique bien un contexte géologique préférentiel dans leur distribution. En effet, ils sont tous localisés au contact de failles NO-SE. C'est pourquoi, la direction des lignes de vol pour tous les levés intra-bassinaux suivants a été choisie selon la direction perpendiculaire NE-SO.

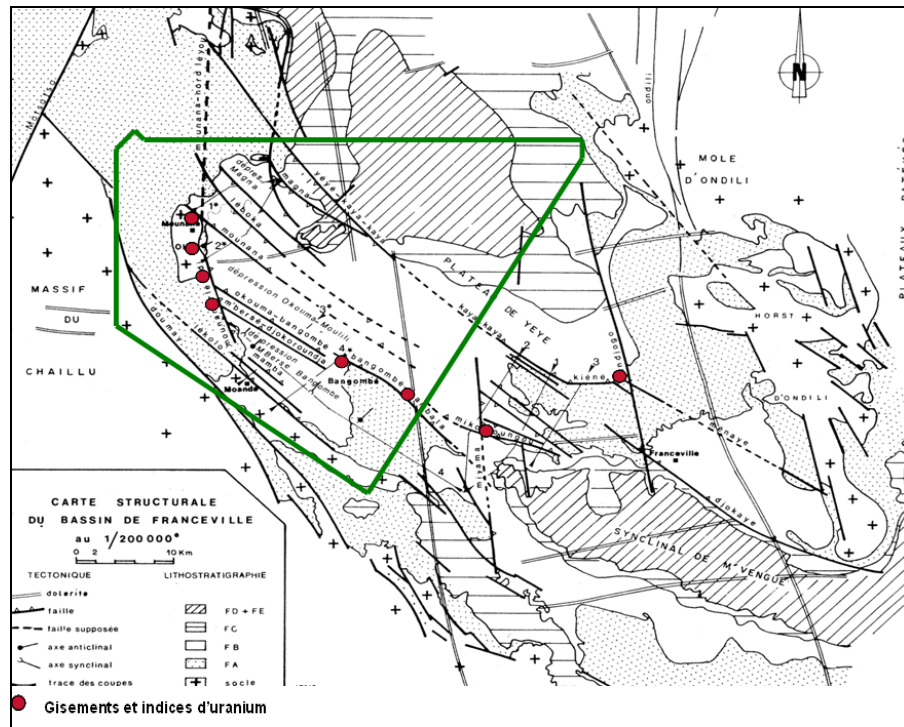


Figure 6.12 : Carte structurale de la région Ouest du Bassin de Franceville (Gauthier-Lafaye, 1986) et localisation des principaux gisements et indices d'uranium connus (OCDE, 1998).

Nous allons présenter succinctement les différents jeux de données de cette zone. Cependant, nous étudierons de façon plus détaillée les données à l'Ouest du bassin dont les limites sont représentées en vert sur la **figure 6.12** et qui couvrent la plupart des indices ou gisements d'uranium.

6.3.5.3.1 Zone occidentale de Mounana-Bangombé

Cette zone comprend un levé obtenu lors de la campagne aéroportée de 2009.

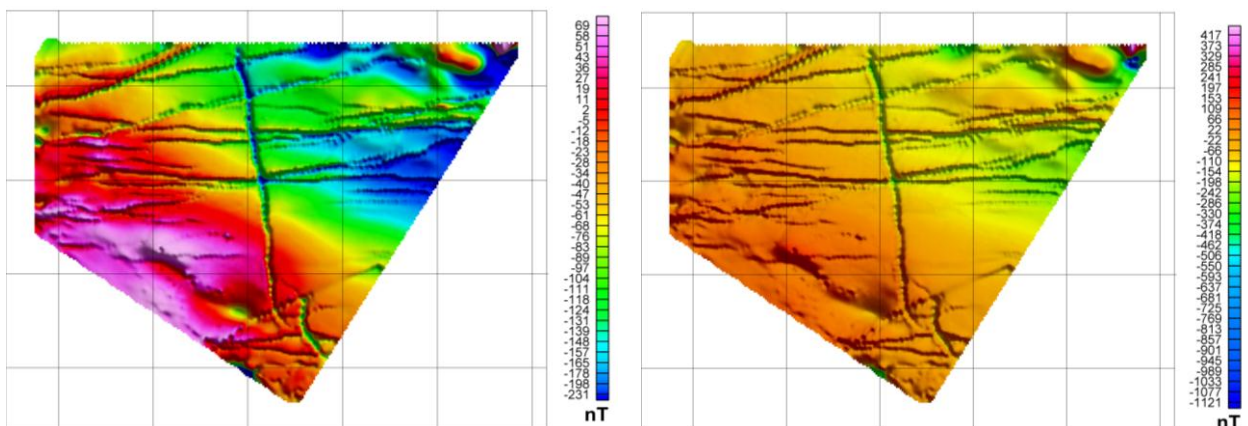


Figure 6.13 : Carte d'anomalie du champ total représentée en équipopulation (à gauche) et en linéaire (à droite), AREVA09 Mounana-Bangombé.

Les zébrures de direction N 70°E et N 170°E sont clairement visibles. Par ailleurs, un gradient anomalique de grande longueur d'onde est décelable en fond de carte décroissant du Sud-Ouest vers le Nord-Est, probablement lié à la signature magnétique du socle. Nous y reviendrons en détail par la suite. Avant cela, examinons de plus près la qualité des données issues de ce levé, sur le logiciel de traitement de données magnétiques *Applimag* développé sous *Matlab* par notre laboratoire.

6.3.5.3.1.1 Considérations sur le choix du pas de la grille

À partir des données d'anomalie, nous calculons deux grilles de pas différents. La première grille a un pas de 100 m, correspondant au quart de l'espacement des lignes de traverse ; elle est représentée à *gauche* de la **figure 6.14**. À *droite* de la figure, nous avons représenté l'anomalie réelle (en *bleu*) mesurée le long d'une ligne de vol (profil 64) et l'anomalie maillée calculée par l'interpolateur (en *rouge*). Ces deux graphes sont quasiment superposés, les structures sont donc bien résolues sur la grille mais des effets de festonnage apparaissent.

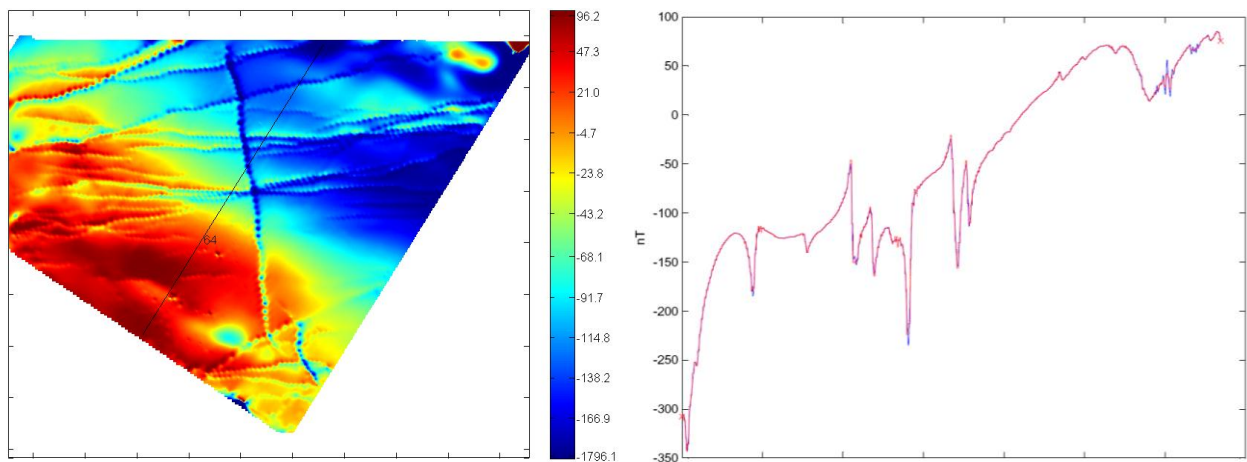


Figure 6.14 : Carte d'anomalie du champ total représentée en équipopulation (à *gauche*) avec un pas de grille de 100 m et les données le long du profil 64 de cap 212° (à *droite*) mesurées (en *bleu*) et interpolées (en *rouge*), AREVA09 Mounana-Bangombé.

Ces effets de haute fréquence sont localisés près des zones de variations brutales d'anomalies. Ils rendent compte des difficultés de l'interpolateur à remplir la grille de pas trop faible par rapport à l'espacement des lignes de vol et à la taille caractéristique des structures. La **figure 6.15** donne une représentation plus détaillée de ces bruits haute fréquence, le long du profil 64 : ils sont repérés par des ovales et mis en correspondance entre la carte 2D (à *gauche*) et 1D (à *droite*).

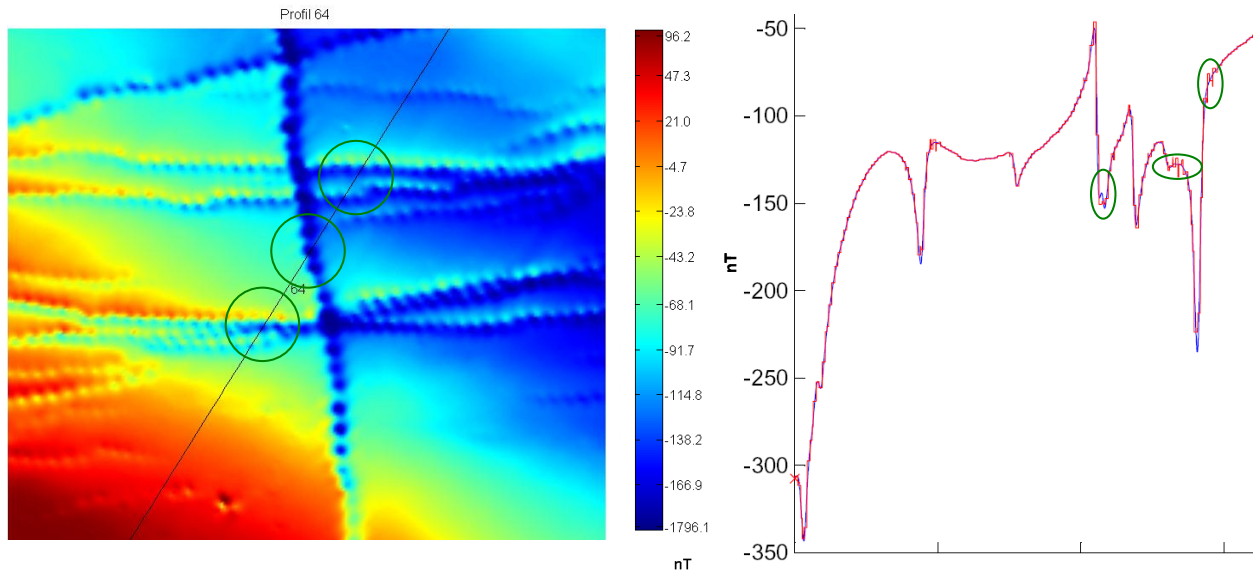


Figure 6.15 : Détail de la carte d'anomalie du champ total 2D (à gauche) et des données 1D le long du profil 64 de cap 212° (à droite) mesurées (en bleu) et interpolées (en rouge). Les zones bruitées sont entourées en vert, AREVA09 Mounana-Bangombé.

Si le pas du maillage est multiplié par trois, le festonnage disparaît mais les structures sont moins bien résolues. Cela est clairement mis en évidence sur le graphe de *droite* de la **figure 6.16** où l'on compare le signal magnétique réel enregistré sur un profil et le signal recalculé à partir de la grille des valeurs interpolées. Les structures de longueur caractéristique inférieure au pas de la grille sont supprimées par l'interpolateur.

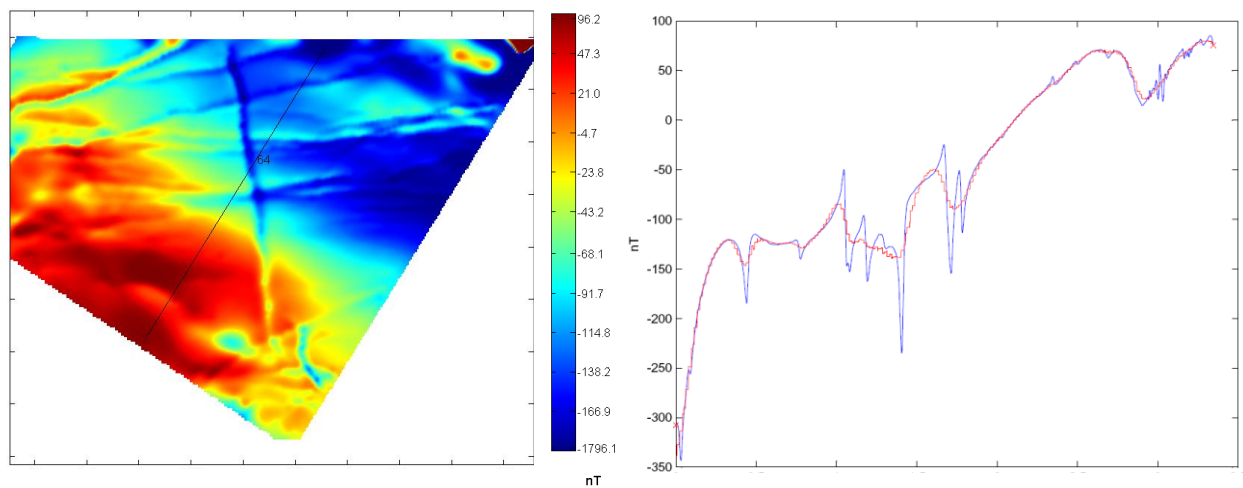


Figure 6.16 : Carte d'anomalie du champ total représentée en équipopulation (à gauche) avec un pas de grille de 300 m et les données le long du profil 64 de cap 212° (à droite) mesurées (en bleu) et interpolées (en rouge).

Finalement, il ressort de cette étude que la qualité des données n'est pas suffisante pour garantir un maillage qui permette à la fois de bien résoudre les structures et d'éviter les bruits numériques. Il apparaît donc que l'espacement entre les lignes de vol est bien trop important par rapport à la hauteur de vol et à la dimension caractéristique des structures.

Pour l'ensemble des cartes, nous avons essayé de trouver un compromis pour minimiser à la fois le pas de la grille de calcul et le bruit numérique.

6.3.5.3.1.2 Écart entre l'AICM et l'AICM1

En application de la relation **1.20**, nous calculons l'anomalie de projection à partir de l'anomalie du champ total. Sa représentation graphique ressemble fortement à celle de l'anomalie du champ total représentée à la **figure 6.13**. C'est pourquoi, nous représentons uniquement la différence entre ces deux fonctions à *gauche* de la **figure 6.17**. À *droite*, nous exposons la norme du champ d'anomalie qui intervient dans le calcul.

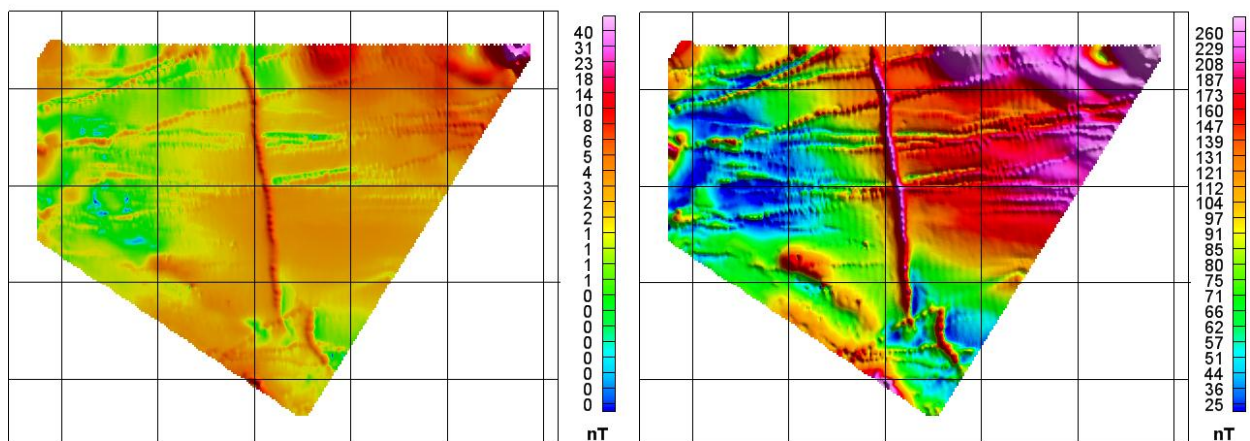


Figure 6.17 : Différence entre l'AICM et l'AICM1 (à gauche) et norme de l'anomalie du champ magnétique (à droite) représentées en équipopulation, AREVA09 Mounana-Bangombé.

Nous remarquons que la différence est relativement faible ; elle reste en moyenne inférieure à 5 % de l'amplitude de l'AICM sauf sur la pointe Nord-Est où elle atteint localement 40 nT, soit 13 %. Dans ce cas, nous pouvons négliger l'erreur commise dans l'approximation **1.9** et assimiler l'AICM à l'AICM1. Il n'est pas inutile d'examiner la **figure 6.17** et de remarquer sa grande similitude à la **figure 6.13**. Or, comme l'illustre la **figure 2.21**, la norme C du champ d'anomalie magnétique a pour dépendance directionnelle uniquement le vecteur aimantation. Cela signifie que les aimantations sont principalement induites par le champ extérieur. Seuls quelques filons E-O semblent présenter une aimantation rémanente à l'Ouest du bassin.

6.3.5.3.2 Zone centrale de Mikoulougou-Kiééné

La zone de Mikoulougou a été couverte en 2008 une première fois puis une seconde en 2009. Ces campagnes ont donné lieu à l'acquisition de données aéromagnétiques à différentes altitudes mais d'interlignes identiques.

Le premier levé AREVA0408 a été effectué à 400 m d'altitude, il est représenté à la **figure 6.18**. En plus des grands couloirs N-70°E et N-170°E, il apparaît aussi un gradient anormalique s'étendant du Sud-Est vers le Nord-Ouest reflétant probablement l'effet magnétique du socle.

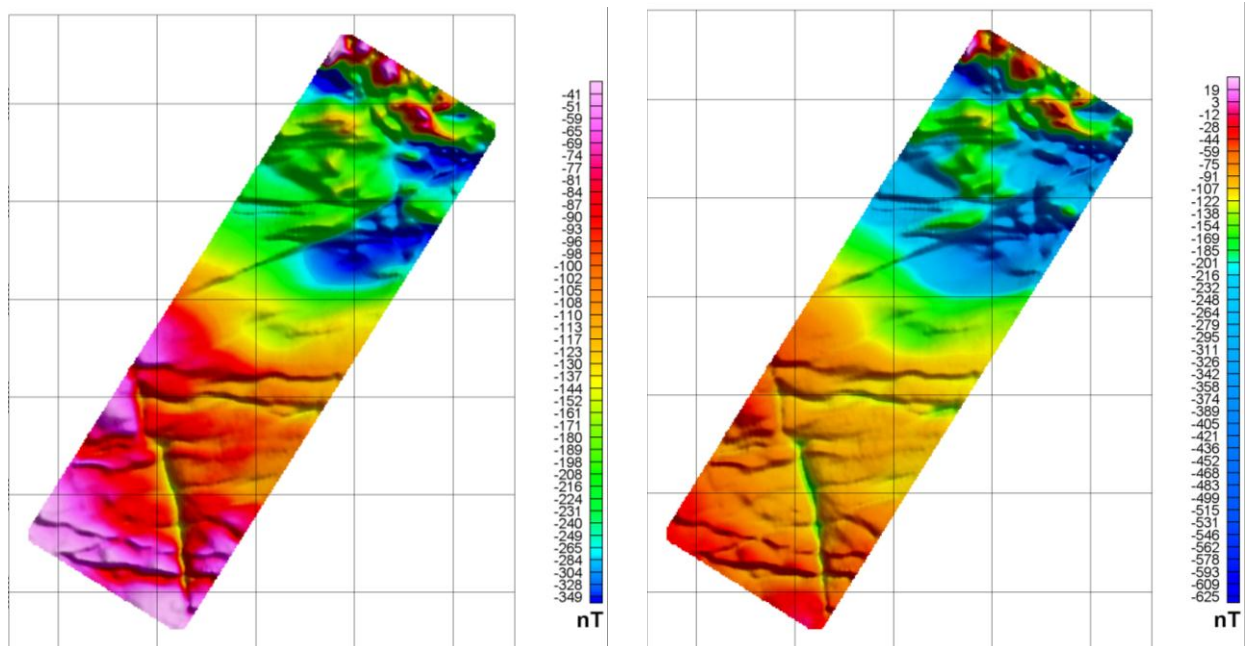


Figure 6.18 : Carte d'anomalie du champ total représentée en équipopulation (à gauche) et en linéaire (à droite), AREVA0408 Mikoulougou.

Sur le levé basse altitude (70 m) de 2009, une observation générale de la carte représentée à la **figure 6.19** donne les mêmes conclusions.

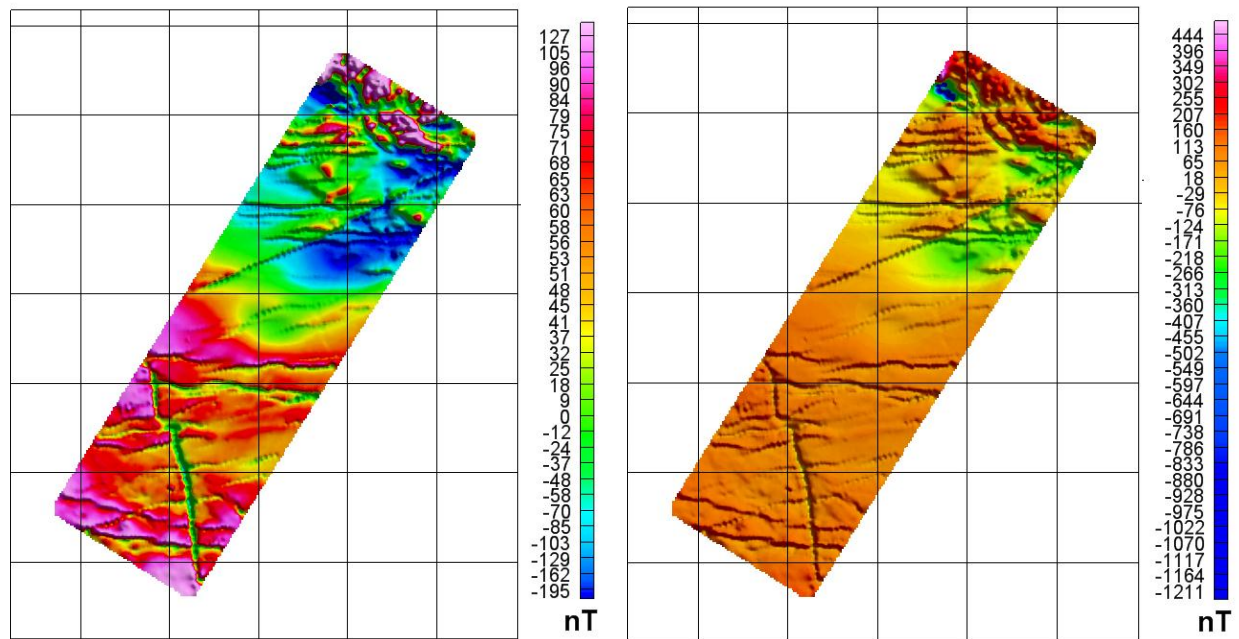


Figure 6.19 : Carte d'anomalie du champ total représentée en équipopulation (à gauche) et en linéaire (à droite), AREVA0508 Mikouloungou.

Cependant, la plus grande proximité des sources amplifie la signature des objets de proche surface et augmente d'une vingtaine de nT la gamme de variation des anomalies. Le signal enregistré est globalement de plus haute fréquence. Par conséquent, l'interpolateur tente d'affiner les détails des structures mais comme l'espacement entre les lignes n'a pas augmenté, cela entraîne des effets de festonnage.

La zone centrale de Mikouloungou Kiéné a été complétée par deux petits levés en 2009 présentés sur les **figures 6.20 et 6.21**.

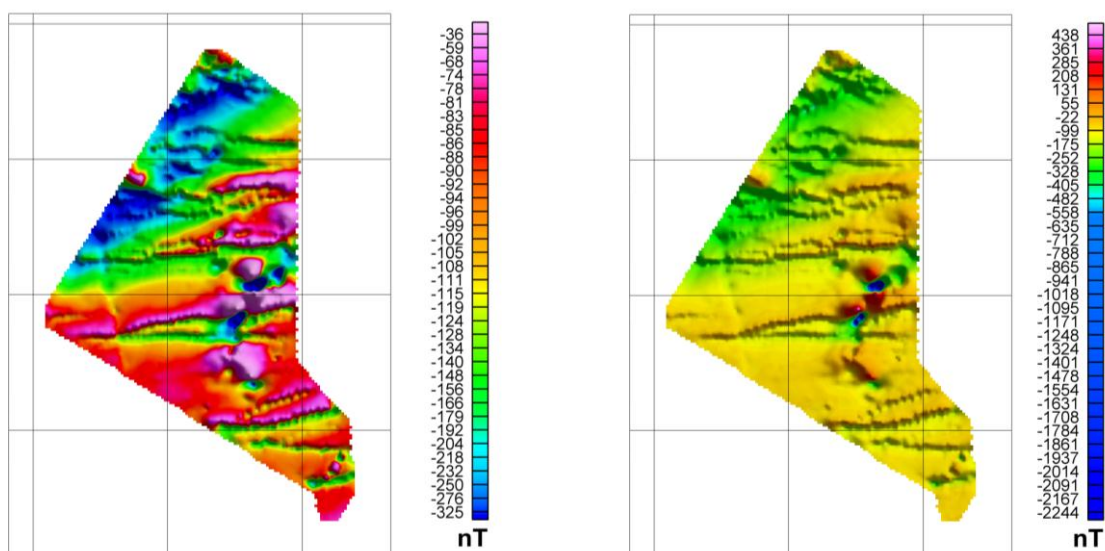


Figure 6.20 : Carte d'anomalie du champ total représentée en équipopulation (à gauche) et en linéaire (à droite), AREVA09 Mikouloungou Kiéné Nord.

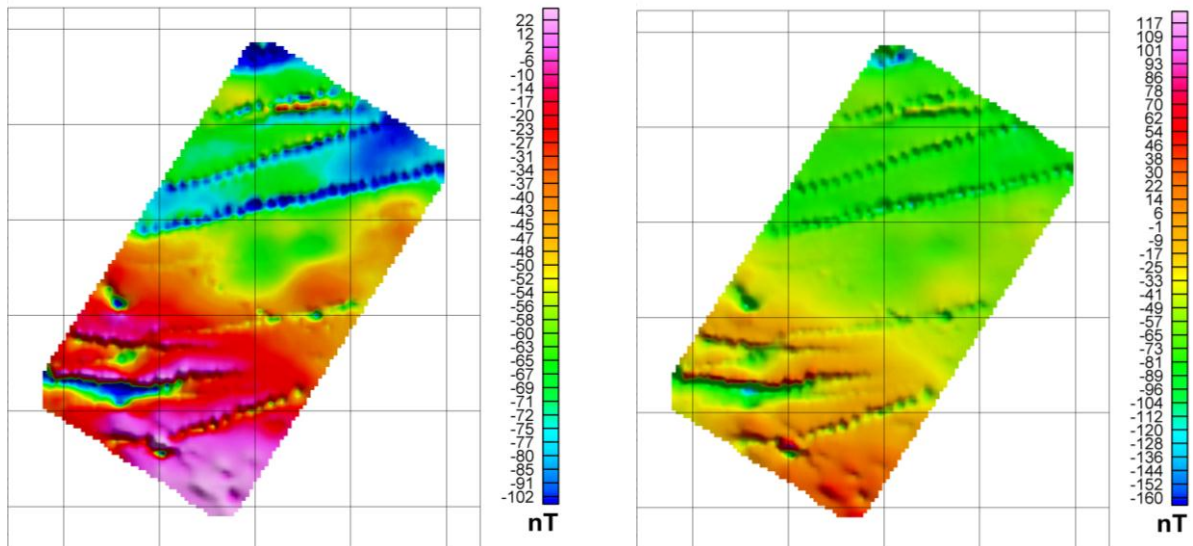


Figure 6.21 : Carte d'anomalie du champ total représentée en équipopulation (à gauche) et en linéaire (à droite), AREVA09 Mikouloungou Kiéné Sud.

Les mêmes observations sont faites sur ces deux zones, la représentation en répartition linéaire de couleur permet de décélérer les variations d'anomalie de grande échelle. Les linéations N-70° Est se superposent à un gradient négatif anomalique de grande longueur d'onde du Sud-Est vers le Nord-Ouest.

6.3.5.3.3 Zone orientale de Djokaye-Mopia

Cette zone a été couverte en 2008. Sur les grilles finales dessinées à la **figure 6.22**, les corrections du champ mesuré par les modèles globaux issus de l'IGRF n'ont pas pu être effectuées.

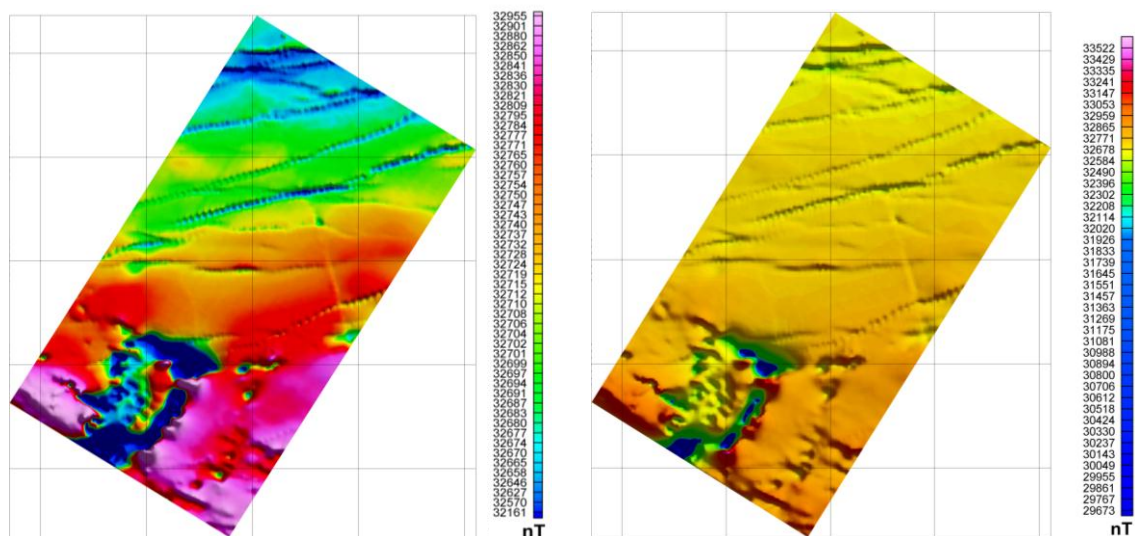


Figure 6.22 : Carte d'anomalie du champ total en équipopulation (à gauche) et en linéaire (à droite), AREVA0508 Djokaye-Mopia.

Cette carte se distingue des précédentes par une zone de fortes anomalies au Sud du permis dépassant le millier de nT d'amplitude.

Afin d'affiner ces premières observations, nous avons recours aux outils de traitement de carte magnétique. La **section 6.4** présente les transformations classiques couramment utilisées en méthodes potentielles tandis que la **section 6.5** montre les améliorations de traitement obtenues avec les nouvelles transformations développées au **chapitre V**.

6.4 TRAITEMENTS STANDARDS ET INTERPRÉTATION DES CARTES

6.4.1 Principes généraux de l'interprétation en méthode magnétique

L'interprétation des anomalies magnétiques mesurées est souvent une tâche difficile à réaliser même dans le cas de sources à géométrie simple. Par exemple, comme nous l'avons vu au **chapitre II** pour la source élémentaire du magnétisme, l'anomalie dipolaire mesurée en surface peut présenter une très large variabilité. En effet, l'anomalie est très sensible à la distance à la source car elle varie en $1/r^3$. Plus la source est profonde, plus l'amplitude de l'anomalie diminue et plus elle est étalée. Elle dépend aussi des orientations des vecteurs aimantation et champ de référence. Au final, une anomalie dipolaire possède huit degrés de liberté comme le montre l'égalité **2.31**, l'hypothèse courante d'aimantation induite par le champ extérieur réduit ce problème à six degrés de liberté. À partir de là, il est facile de concevoir la difficulté d'interpréter des anomalies créées par des sources étendues et parfois imbriquées les unes dans les autres. De plus, des sources géologiques d'aimantation, de géométrie et de profondeurs différentes peuvent produire une réponse magnétique identique. Ces ambiguïtés peuvent être considérablement réduites si l'interpréteur dispose par ailleurs d'informations générales sur la nature du sous-sol.

Ainsi, les changements d'aimantation (ou de susceptibilité) dans les minéraux magnétiques, aussi bien dans les roches du socle que dans sa couverture non consolidée, affectent la carte d'anomalie du champ total. Ces contrastes peuvent être dus à un changement de teneur en magnétite ou bien en minéraux paramagnétiques cités au **chapitre I**. À l'échelle de la roche, l'amplitude des anomalies magnétiques permet de distinguer les roches magnétiques des roches non-magnétiques. Ainsi, il est possible de distinguer les coulées intrusives mafiques des coulées intrusives felsiques. De même, les volcanites felsiques et les sédiments ont des signatures magnétiques différentes.

Les anomalies mesurées peuvent être aussi le résultat d'une variation des directions d'aimantation. Dans notre cas, signalons que les roches paléo-protérozoïques du Bassin de Franceville ont été soumises à des pressions et températures élevées au cours des phases tectoniques et métamorphiques. Par conséquent, l'aimantation acquise lors de la formation de ce matériau a été modifiée, conduisant aussi à un contraste de susceptibilité magnétique.

Enfin, les longueurs d'onde caractéristiques des sources peuvent être décelées dans la forme du signal enregistré.

Dans le paragraphe qui suit, nous présentons les outils classiques de transformation de carte qui nous permettront de tirer un maximum d'information géologique des mesures magnétiques.

6.4.2 Méthodes classiques d'interprétation

Ce paragraphe a pour objectif de rappeler les principaux opérateurs utilisés pour l'interprétation des cartes magnétiques. Nous donnons de façon succincte leur formulation et leur domaine d'application. Le lecteur, peu familier avec ces outils, pourra se référer à l'ouvrage de Blakely (1995) pour de plus amples explications.

6.4.2.1 Réduction au pôle

La principale difficulté pour l'interpréteur tient au fait que le maximum d'une anomalie est rarement à l'aplomb de sa source. En effet, elle est le résultat d'une double projection du superpotentiel magnétique dans la direction du champ et dans la direction de l'aimantation.

Or l'anomalie magnétique créée par une structure, dont les vecteurs aimantation et champ de référence sont tous les deux verticaux, présente un maximum à l'aplomb de la source. Il semble donc intéressant de rendre les deux vecteurs localement verticaux et d'étudier la nouvelle projection donnant l'anomalie maximale à l'aplomb de la source. Baranov (1957) introduit un outil permettant de transformer une anomalie asymétrique mesurée à une latitude quelconque en anomalie symétrique simulée au pôle. Cette transformation dite de « *réduction au pôle* » ou parfois de « *double réduction au pôle* » a donc pour effet de simuler la mesure de l'anomalie aux pôles magnétiques dans un cas d'aimantation induite. De nombreux travaux ont été menés par la suite sur cet opérateur dont les plus importants : (Baranov, Naudy, 1964), (Bhattacharya, 1965), (Gunn, 1975), (Shuey, 1972), (Baranov, 1975) et (Hildenbrand, 1983).

L'opérateur H_{drp} de cette transformation, appliqué sur une zone où les vecteurs champ et aimantation sont uniformes, a pour expression dans le domaine spectral

$$H_{drp} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{iLu + iMv - N\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{ilu + imv - n\sqrt{u^2 + v^2}}. \quad (\text{Eq-6.1})$$

Cet opérateur ne modifie pas l'ordre de dérivation de l'anomalie. Il correspond à un calcul de changement de phase du signal magnétique qui ramène l'anomalie magnétique à l'aplomb de sa source. L'inconvénient de la réduction au pôle est qu'elle se heurte le plus souvent à la méconnaissance du vecteur unitaire d'aimantation de la source. On suppose communément une aimantation purement induite ; l'opérateur s'écrit alors

$$H_{drp} = \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{iLu + iMv - N\sqrt{u^2 + v^2}} \right)^2. \quad (\text{Eq-6.2})$$

Si la composante rémanente de l'aimantation est importante mais inconnue, on devra se contenter d'un opérateur de réduction partiel agissant uniquement sur la direction du champ. Cet opérateur permet de simuler une acquisition au pôle au dessus d'une source à aimantation rémanente. Cet opérateur H_{srp} de « *simple réduction au pôle* », déjà mentionné au **paragraphe 2.5.5**, s'écrit dans le domaine spectral

$$H_{srp} = \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{iLu + iMv - N\sqrt{u^2 + v^2}}. \quad (\text{Eq-6.3})$$

Il est à utiliser avec précaution car il peut augmenter ou diminuer l'effet de la rémanence de la source, déplaçant ou non l'anomalie vers l'aplomb de la source.

Nous avons déjà signalé au **chapitre IV** que le calcul de la double réduction au pôle implique inévitablement celui du superpotentiel. Les deux intégrations obliques mises en jeu dans ces deux opérateurs (équations **3.61** et **6.2**) rendent impossible l'utilisation de données proches de l'équateur. Cette limitation est bien connue pour la réduction au pôle, mais un éclairage nouveau est donné par les propriétés de la fonction superpotentiel. En effet, cette dernière étant continue et bornée dans un demi-espace hors des sources, sa fonction dérivée existe donc partout. Finalement, le problème de la réduction au pôle de données équatoriales provient uniquement de la façon dont l'opérateur est défini et non pas d'une impossibilité physique (Munsch & Fleury, 2011).

6.4.2.2 Dérivations et intégrations

Parfois, plusieurs structures peuvent être imbriquées l'une dans l'autre et pourtant ne générer qu'une seule anomalie. L'opérateur de dérivation introduit aux équations **3.10** et **3.11** permet souvent d'individualiser des sources proches. Il joue le rôle de filtre passe-haut, amplifiant les courtes longueurs d'onde au détriment des grandes longueurs d'onde. Cet opérateur peut aussi être employé pour distinguer les anomalies de proche surface masquées par le signal du socle.

La transformation inverse de la dérivation est l'intégration. Celle-ci joue le rôle de filtre passe-bas et peut se révéler utile pour l'étude des grandes anomalies, en particulier celles générées par le socle.

L'expression générale H_d de cet opérateur effectuant ces deux transformations a été établie à l'équation **3.48**, nous la rappelons ici

$$H_d = \left(iLu + iMv - N\sqrt{u^2 + v^2} \right)^\gamma.$$

avec γ un nombre réel positif pour la dérivation d'ordre γ et négatif pour l'intégration d'ordre γ .

Dans le cas usuel d'aimantation purement induite, cet opérateur est utilisé, au signe près, pour passer de l'AICM1 au potentiel ($\gamma = -1$) et de l'AICM1 au superpotentiel ($\gamma = -2$).

6.4.2.3 Prolongements verticaux

Les prolongements vers le haut ou vers le bas consistent à traduire mathématiquement le plan des mesures. L'expression de l'opérateur H_p a été démontrée au **paragraphe 2.9**, à l'équation **2.107**

$$H_p = e^{sz}$$

- Si $z > 0$, l'opérateur permet de calculer l'anomalie à la hauteur z au-dessus du plan d'acquisition : le prolongement est dit vers le « *haut* ». Il joue le rôle de filtre passe-bas analogue à l'opérateur d'intégration.
- Si $z < 0$, l'opérateur permet de calculer l'anomalie à la hauteur z au dessous du plan d'acquisition : le prolongement est dit vers le « *bas* ». Il joue le rôle de filtre passe-haut analogue à l'opérateur de dérivation. Il est donc instable en présence de bruit haute

fréquence, son utilisation se limite à l'estimation de profondeur du toit des sources. Plus profond, l'anomalie prolongée diverge car ne vérifie plus l'équation de Laplace et perd ses propriétés harmoniques.

6.4.2.4 Inversion par la couche équivalente d'anomalie

Une caractéristique essentielle des méthodes potentielles réside dans l'ambiguïté de remonter à l'aimantation d'une source à partir de son champ mesuré sur un plan extérieur. C'est la définition du problème inverse exposé au **paragraphe 2.7.5**. Ainsi, si l'anomalie magnétique est connue sur un plan, alors on peut trouver une infinité de plans sources de profondeurs et d'aimantations variables. Pour diminuer le nombre de solutions, il suffit d'imposer une géométrie à la source. Le plus simple est d'imposer une distribution plane de sources dipolaires, c'est la méthode dite de la « *couche équivalente* » (Bhattacharyya, 1977).

L'expression spectrale de l'anomalie rapportée dans un plan distant de h du dipôle situé en (x_0, y_0, z_0) a été calculé à l'équation **3.51**

$$\bar{F}_1(u, v, h) = \tilde{m}_0 \frac{e^{-|h-z_0|s}}{s} (iLu + iMv - Ns) (ilu + imv - ns) \bar{S}_d(u, v).$$

Supposons ensuite une distribution de dipôles dans le plan (xy) d'aimantation $m_0(x, y)$ ne dépendant que de leur position. On suppose que la direction du champ et des aimantations ne varient pas sur l'espace considéré. L'intégration double sur ce plan de l'expression précédente donne

$$\bar{F}_1(u, v, h) = \frac{e^{-|h-z_0|s}}{s} (iLu + iMv - Ns) (ilu + imv - ns) \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \tilde{m}_0(x, y) e^{-iux} e^{-ivy} dx dy, \quad (\text{Eq-6.4})$$

soit pour des moments dipolaires induits

$$\bar{F}_1(u, v, h) = \frac{e^{-|h-z_0|s}}{s} (iLu + iMv - Ns)^2 \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \tilde{m}_0(x, y) e^{-iux} e^{-ivy} dx dy. \quad (\text{Eq-6.5})$$

On reconnaît, à droite, l'expression de la transformée de Fourier de l'aimantation. On calcule le spectre des aimantations en identifiant $\bar{F}_1(u, v, h)$ aux données de terrain. Ainsi, on obtient une

couche équivalente de signature magnétique identique aux données mesurées à la bonne profondeur.

Cette méthode d'inversion sera appliquée uniquement sur des profils 2D. Par ailleurs, elle perd en performance quand l'aimantation rémanente n'est plus négligeable par rapport à l'aimantation induite de la source.

6.4.2.5 Tilt angle

L'opérateur de tilt angle (Miller et Singh, 1994 ; Verduzco et al., 2004 ; Salem et al., 2008) est défini comme l'arc tangente du rapport de la dérivée verticale de l'anomalie du champ total avec le module de son gradient horizontal. L'opérateur H_θ appliqué à l'anomalie F s'écrit donc

$$H_\theta(F) = \tan^{-1} \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}. \quad (\text{Eq-6.6})$$

Cette transformation a pour avantage de donner une importance égale aux anomalies quelque soit leur amplitude. En effet, la fonction arc tangente a pour effet de répartir le signal calculé entre -90° et $+90^\circ$. Par ailleurs, Salem et al. (2007) ont montré que l'opérateur, appliqué à des données réduites au pôle, permettait d'estimer les profondeurs des sources. Cependant, ce résultat est vérifié uniquement pour un contact vertical 2D représenté en *bas* de la **figure 6.23**.

Comme l'illustre le cadran du *milieu* de la **figure 6.23**, ces auteurs ont montré que la valeur du tilt présentait trois valeurs intéressantes pour l'interprétation :

- $H_\theta(F) = 0^\circ$: correspond au lieu des points à l'aplomb du contact ($h = 0$),
- $H_\theta(F) = \pm 45^\circ$: la distance entre l'une des deux valeurs et la valeur nulle, la fonction tilt étant symétrique, permet d'estimer la profondeur du toit du socle ($h = \pm Z_c$).

La carte du tilt permet donc une analyse combinée des limites des structures 2D et de leur profondeur. Dans notre étude, cette hypothèse 2D est suffisante car nos cibles privilégiées sont principalement des failles et des filons

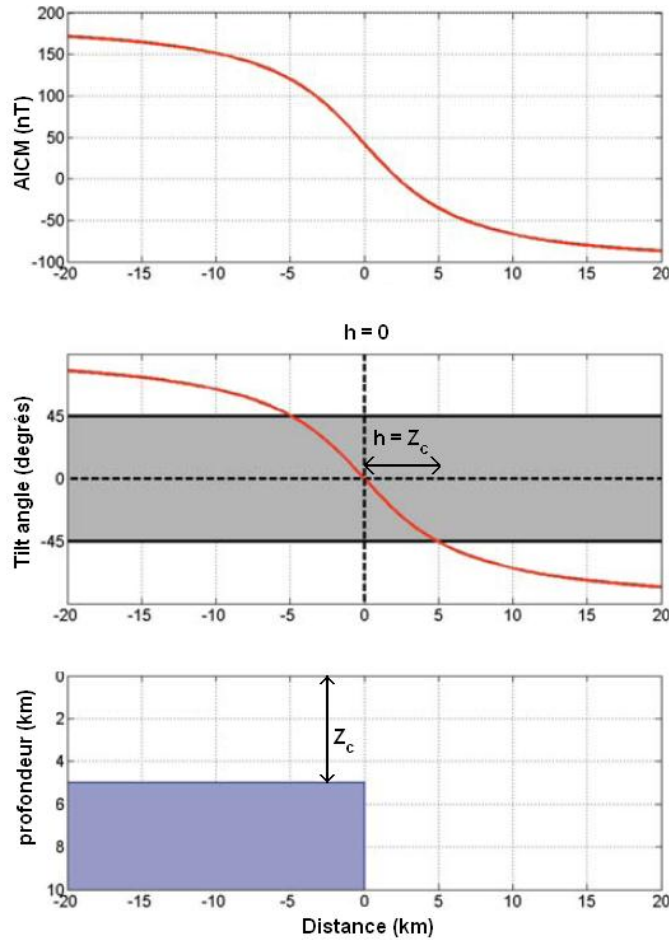


Figure 6.23 : Etude d'une demi-plaque infinie aimantée de profondeur Z_c (en bas) créant une anomalie magnétique (en haut) réduite au pôle et transformée en tilt angle (d'après Salem et al., 2007).

6.4.2.6 Filtrage directionnel

Les opérateurs de filtrage sont à manipuler avec précaution, car ils peuvent modifier profondément l'information physique véhiculée par le signal. Le filtrage directionnel (Pilkington et Roest, 1998 ; Sykes et Das, 2000) peut toutefois se révéler pertinent pour supprimer la signature magnétique d'objets 2D, tels que les filons, parfois gênants pour l'interprétation. Son opérateur a pour expression mathématique

$$H_\alpha = \left| \cos^n \left(\alpha - \omega + \frac{\pi}{2} \right) \right|, \quad (\text{Eq-6.7})$$

avec n un entier positif, α l'azimut de la direction rejetée mesuré depuis le Nord en degré et

$$\cos \omega = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{et} \quad \sin \omega = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}. \quad (\text{Eq-6.8})$$

Pour les faibles valeurs de n , la fonction cosinus rend le filtre lisse et évite les problèmes de rupture de pente. La **figure 6.24** illustre l'effet de ce paramètre sur l'amplitude du filtre.

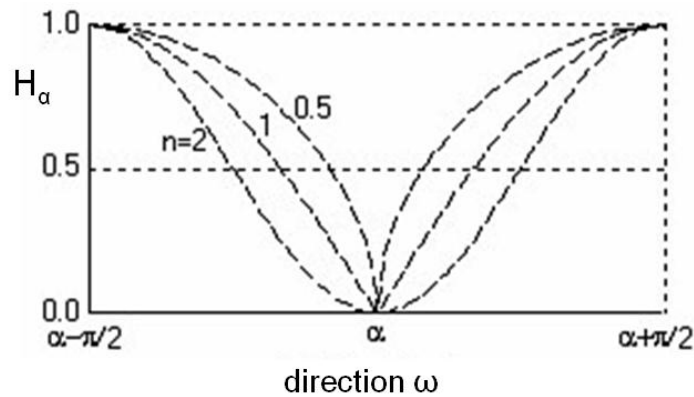


Figure 6.24 : Opérateur de filtrage directionnel permettant de rejeter la direction d'azimut α .

Notons que ce filtre est parfois utilisé pour la décorrugation de données mal nivelées (cf. **paragraphe 6.3.3**). Enfin, son opérateur réciproque permet de sélectionner une direction à conserver et s'écrit

$$H_{\alpha}^{-1} = 1 - \left| \cos^n \left(\alpha - \omega + \frac{\pi}{2} \right) \right|, \quad (\text{Eq-6.9})$$

avec n un entier positif et α l'azimut de la direction conservée mesuré depuis le Nord en degré et

$$\cos \omega = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad \text{et} \quad \sin \omega = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

6.4.2.7 Modélisation 2D par la méthode de Talwani

Pour aider à la résolution du problème inverse, il est souvent utile de revenir au problème direct. Ainsi les résultats issus des outils d'interprétation décrits ci-dessus peuvent être infirmés ou confirmés par modélisation. La modélisation 3D étant difficile à mettre en œuvre, nous nous limitons à des structures 2D infinies dans une direction horizontale. Cette méthode est tout à fait adaptée à la modélisation du socle, des filons et des contacts semi-infinis.

Nous utilisons le programme *Modgm2D* développé sous *Matlab* par notre laboratoire. Le programme repose sur la méthode de Talwani (1964) et permet de calculer les anomalies magnétiques (et gravimétriques) de structures 2D. Ces structures doivent être polygonales dans le plan vertical. En effet, la méthode de Talwani utilise le calcul relativement simple d'anomalies le long de segments rectilignes. L'anomalie résultante du polygone complet est la somme des contributions de chaque segment. L'utilisateur programme librement la géométrie de ces structures sous formes de polygones dans le plan vertical. Pour chaque objet, il peut choisir sa susceptibilité

et sa direction d'aimantation. Le programme calcule ensuite la réponse magnétique du modèle que l'on peut ensuite comparer aux données. Il y a toujours plusieurs modèles qui peuvent expliquer les données, c'est pourquoi il est important que l'utilisateur ait à sa disposition des connaissances préalables sur la structure du sous sol.

6.4.2.8 Précaution d'usage autour des opérateurs de transformation

Ces opérateurs de transformation de carte seront appliqués dans la suite de notre développement aux données aéromagnétiques de la région de Franceville. Comme nous l'avons déjà signalé, ces calculs se font dans le domaine de Fourier. L'utilisation de ces fonctions dans ce domaine nécessite quelques précautions. En effet, le plan horizontal d'acquisition est non seulement fini (les anomalies ne sont jamais complètes) mais en plus souvent non rectangulaire. Or, remplir un domaine rectangulaire nécessite des extrapolations qui affectent inévitablement le signal.

6.4.3 Interprétation magnétique des levés supra-bassinaux

A partir des deux levés supra-bassinaux, préalablement réduits au pôle, nous dressons les cartes du tilt angle, à gauche des **figures 6.25 et 6.26**.

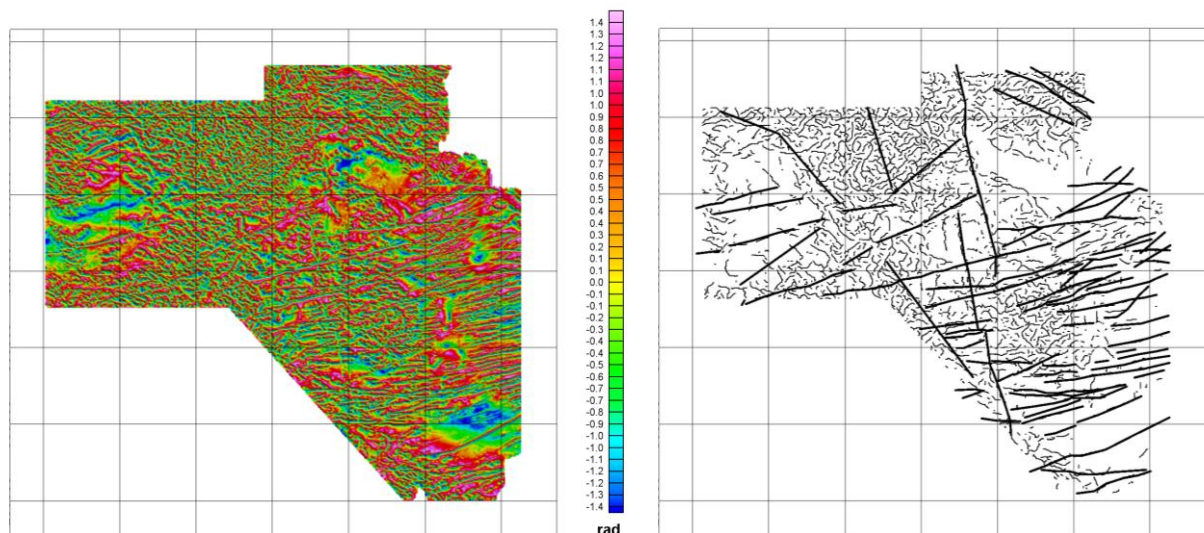


Figure 6.25 : Carte du tilt angle (à gauche) et son analyse structurale semi-automatique (à droite), CGG83.

Une analyse structurale semi-automatique (Cordell et Grauch, 1982 ; Debeglia et al., 2006) réalisée par l'utilitaire *CET Grid Analysis* de *Geosoft*, permet de détecter numériquement les points d'annulation de la carte du tilt. Les résultats, correspondants aux limites des unités géologiques,

sont présentés sur un schéma structural à *droite* des **figures 6.25** et **6.26** complété par une interprétation manuelle en traits plus foncés des principales linéations magnétiques.

Pour le levé CGG83, l'espacement des lignes fixé à 1000 m permet uniquement de dresser une carte structurale très générale de la zone. On sait en effet, par expérience, qu'un espacement de ligne donné ne permet pas de détecter des objets de taille inférieure à cette longueur.

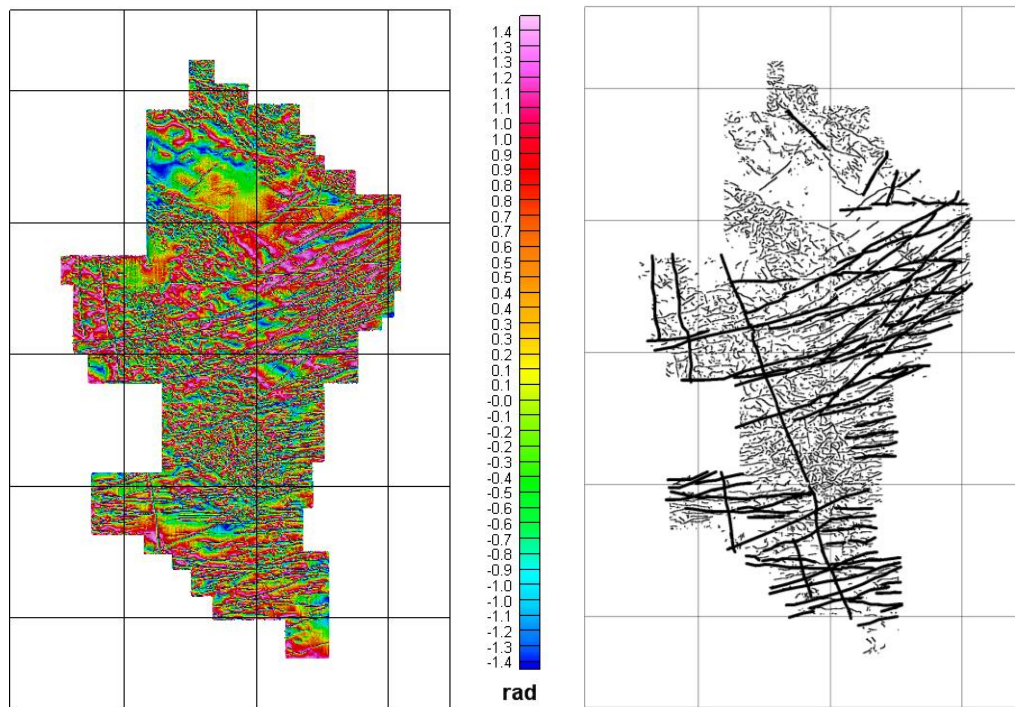


Figure 6.26 : Carte du tilt angle (à *gauche*) et son analyse structurale semi-automatique (à *droite*), AREVA07.

Pour le levé AREVA07, l'espacement des lignes divisé par 4 permet de déceler des structures 4 fois plus fines. Les deux cartes structurales confirment la prépondérance des linéations N-70° Est et N-160° Est. On retrouve bien les orientations des principaux accidents régionaux survenus lors des deux premières phases de l'histoire du bassin décrite au **paragraphe 6.1.1**.

6.4.4 Interprétation magnétique des levés intra-bassinaux

6.4.4.1 Zone occidentale de Mounana-Bangombé

6.4.4.1.1 Etude structurale par le tilt angle

Pour les raisons exposées au **paragraphe 6.3.5.3**, nous présentons un traitement plus poussé des données AREVA09 Mounana-Bangombé. Après une double réduction, la carte du tilt angle est calculée et représentée à la **figure 6.27**. Les bruits de haute fréquence décrits au **paragraphe 6.3.5.3.1.1** apparaissent un peu plus sans pour autant gêner l'interprétation.

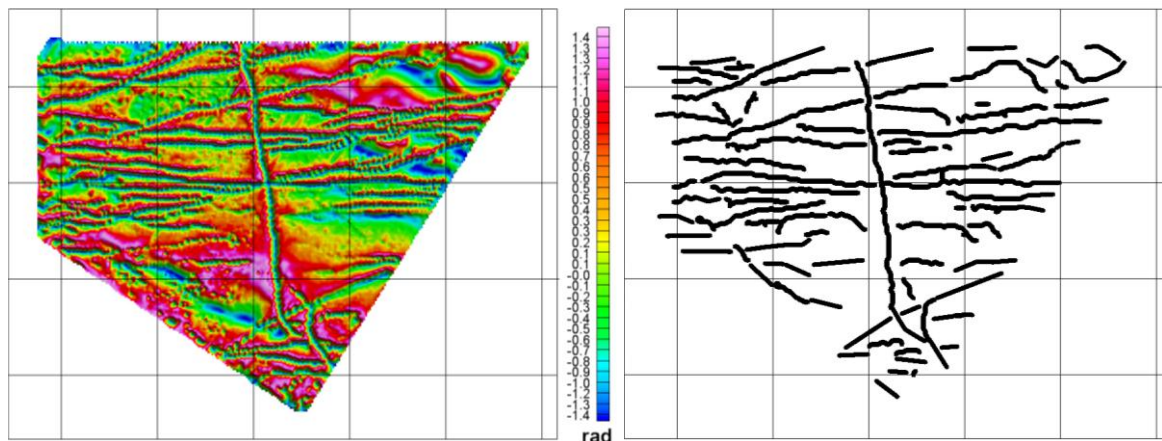


Figure 6.27 : Carte du tilt angle (à gauche) et son analyse structurale (à droite), AREVA09 Mounana-Bangombé.

Ces cartographies aériennes font clairement apparaître les filons qui s'étendent approximativement selon les deux directions horizontales. Ces linéaments magnétiques longs et étroits sont probablement le résultat de coulées mafiques intrusives. En plus d'une interprétation structurale, la carte du tilt permet d'estimer les profondeurs des structures semi-infinies. En supposant les directions verticales et horizontales de chaque filon quasi infinies, nous pouvons appliquer les résultats de Salem et al. (2007), rappelés au **paragraphe 6.4.2.5**. La **figure 6.28** montre deux vues rapprochées de chacune des deux familles de structures 2D, dans la zone du profil 64 déjà étudié au **paragraphe 6.3.5.3.1.1**.

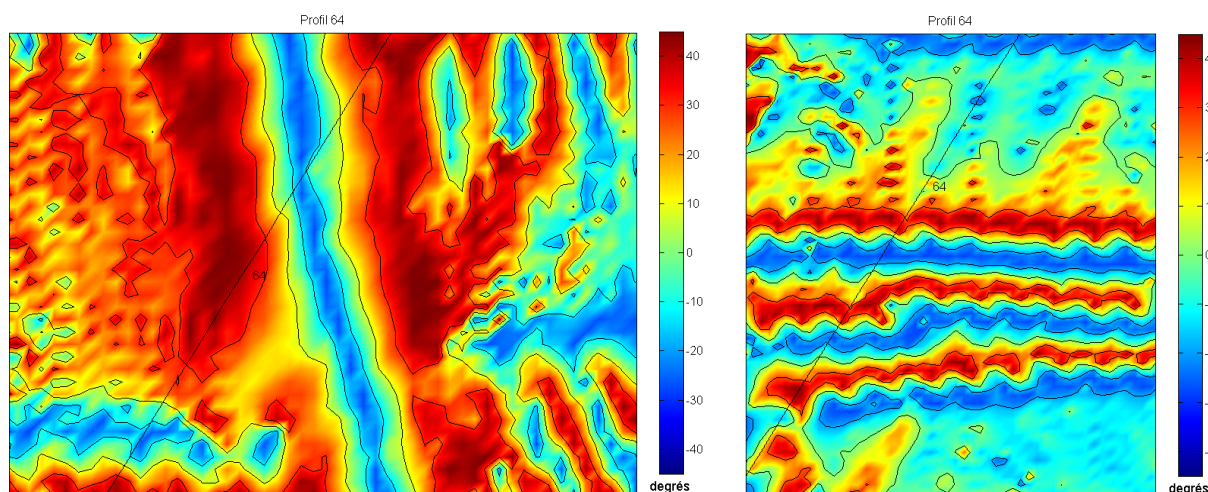


Figure 6.28 : Cartes du tilt angle de la zone où le profil 64 intercepte les filons N-170° (à gauche) et E-O (à droite), AREVA09 Mounana-Bangombé.

La distance moyenne mesurée entre $H_\theta(F) = 0^\circ$ et $H_\theta(F) = -45^\circ$ le long du filon de direction sub-méridienne est d'environ 130 m. Pour les filons E-O, nous obtenons approximativement 70 m. Sachant que l'altitude de vol est d'environ 70 m, nous en déduisons par cette méthode que les filons sont affleurants ou sub-affleurants. Ces résultats sont en accord avec les observations géologiques (Gauthier-Lafaye, 1986). Vérifions, à présent, que la méthode de la couche équivalente donne le même ordre de grandeur.

6.4.4.1.2 Inversion par la couche équivalente

On cherche par inversion une distribution plane de dipôles qui pourrait expliquer l'anomalie Nord-Sud associée au filon de dolérite ainsi que les anomalies périphériques liées aux filons E-O situé au milieu de la carte. À la **figure 6.29**, on représente à *gauche* le profil 64 qui coupe ces structures au centre de la zone. Ce profil est localisé à *droite* en rouge sur le plan de vol ; notons que les lignes de recoupe n'ont pas été reproduites.

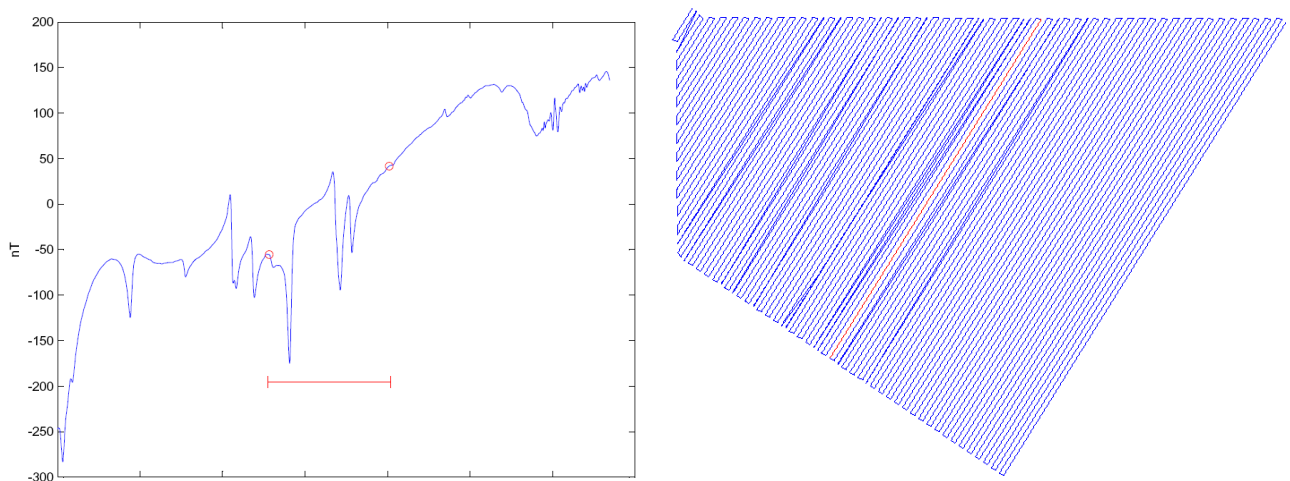


Figure 6.29 : Anomalie magnétique le long du profil 64 de cap 212° (à gauche) et sa localisation (à droite).

On ne conserve que le signal situé dans la zone d'influence du filon (trait rouge, à gauche de la **figure 6.29**) que l'on inverse selon la méthode de Bhattacharyya (1977). On procède par distance à la source croissante, respectivement 70, 100, 150 et 200 m. Les **figures 6.30** et **6.31** montrent les résultats obtenus. Chaque figure comporte trois cadrans. De haut en bas, nous affichons :

- le signal mesuré (en *bleu*) et le signal calculé à partir de la couche équivalente (en *rouge*),
- la différence entre ces deux signaux,
- la distribution surfacique de dipôles d'aimantation variable.

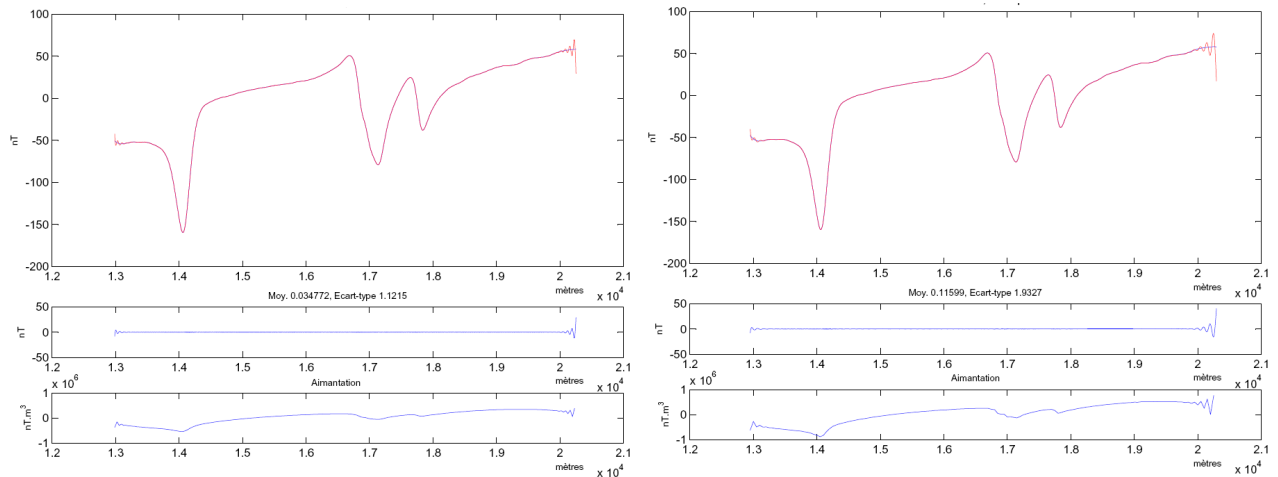


Figure 6.30 : Inversion 2D d'après la méthode de la couche équivalente à 70 m de profondeur (à gauche) puis à 100 m (à droite), AREVA09 Mounana-Bangombé.

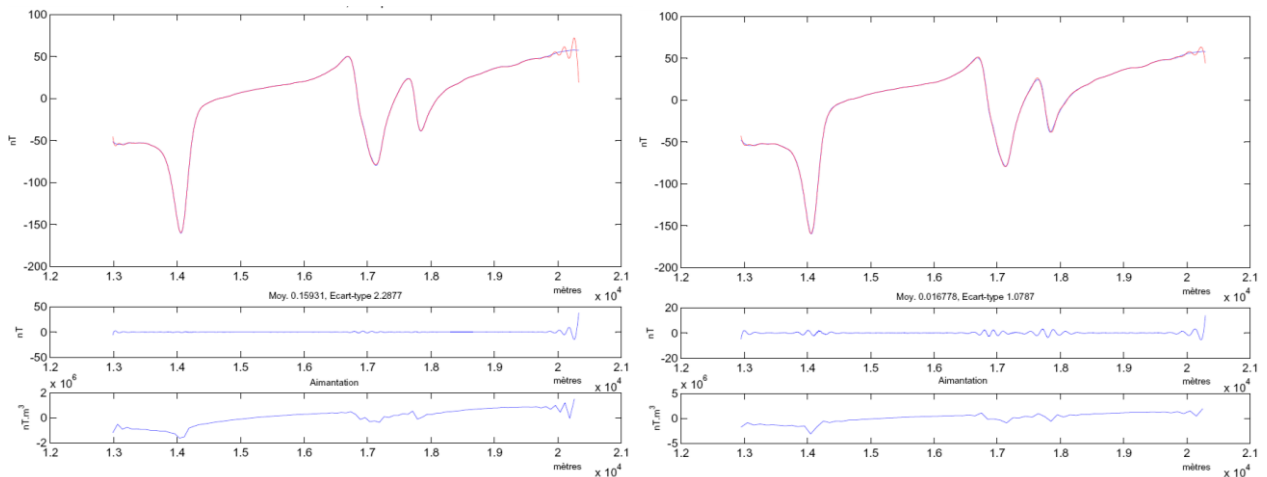


Figure 6.31 : Inversion 2D d'après la méthode de la couche équivalente à 150 m de profondeur (à gauche) puis à 200 m (à droite), AREVA09 Mounana-Bangombé.

En vertu des propriétés des méthodes inverses, cette méthode ne garantit pas l'unicité de la solution, mais elle permet d'estimer une profondeur maximale de la couche pouvant expliquer les données. Ici, nous observons qu'au-delà de 150 m du plan de vol, des oscillations apparaissent dans le second cadran à gauche de la **figure 6.30**. La couche aimantée crée alors une anomalie de trop basse fréquence pour se superposer aux données réelles.

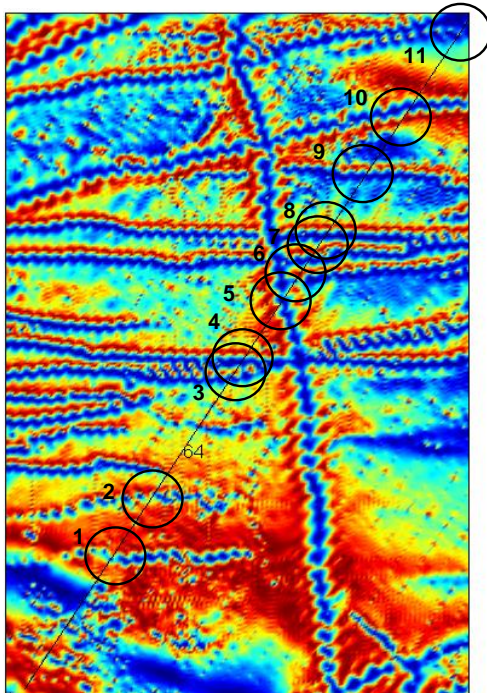
Finalement, cette méthode situe le toit des structures, au maximum, à 80 m de profondeur.

6.4.4.1.3 Modélisation 2D par la méthode de Talwani

L'objectif de cette modélisation est de retrouver la géométrie 2D des principales structures magnétiques, en particulier celles des filons et du socle. Nous sélectionnons le profil 64 que nous

avons déjà décrit aux paragraphes précédents. Une analyse rapide de la **figure 6.32** représentant la carte du tilt angle détaillée montre que ce profil intersecte onze filons. Par souci de clarté, ils ont été cerclés et numérotés de 1 à 11 du Sud au Nord.

Les paramètres importants de modélisation ont été rassemblés dans le tableau à *droite* de la **figure 6.32**, soit respectivement pour chaque structure : sa susceptibilité magnétique, la profondeur moyenne de son toit, sa largeur moyenne et enfin l'inclinaison et la déclinaison magnétique de son vecteur aimantation. Toutes les profondeurs sont corrigées de l'altitude de vol et l'anomalie est calculée en utilisant les données de l'IGRF correspondant à la zone et à la date du vol.



Objet	χ (SI)	Prof (m)	Larg (m)	I (°)	D (°)
Socle	0.020			-30	-3
Dyke 01	0.001	0	60	-30	-3
Dyke 02	0.001	40	80	-50	-3
Dyke 03	0.009	20	20	-70	-3
Dyke 04	0.005	20	50	-40	-3
Dyke 05	0.007	0	50	90	-3
Dyke 06	0.002	50	30	-60	-3
Dyke 07	0.003	0	60	-90	-3
Dyke 08	0.002	0	60	-70	-3
Dyke 09	0.004	40	20	-40	-3
Dyke 10	0.001	0	90	-30	-3
Dyke 11	0.004	70	80	-30	-3

Figure 6.32 : Carte détaillée du tilt angle dans la zone du profil 64 avec les onze filons intersectés (à gauche) et tableau synthétisant les paramètres utilisés pour la modélisation (à droite), AREVA09 Mounana-Bangombé.

Le signal du socle est généré à partir d'un polygone échantillonné avec un pas de 1000 m, il est considéré infini à ses deux extrémités pour éviter les effets de bords. Le programme fonctionne par modélisations et inversions successives pour déterminer la topographie du socle aimanté permettant de superposer au mieux le signal magnétique calculé avec le signal magnétique mesuré. Les filons sont ensuite modélisés par des polygones de six sommets en moyennes. Tous ces objets ont une base considérée comme étant infiniment profonde.

Le résultat de la modélisation du socle et des filons est présenté à la **figure 6.33**.

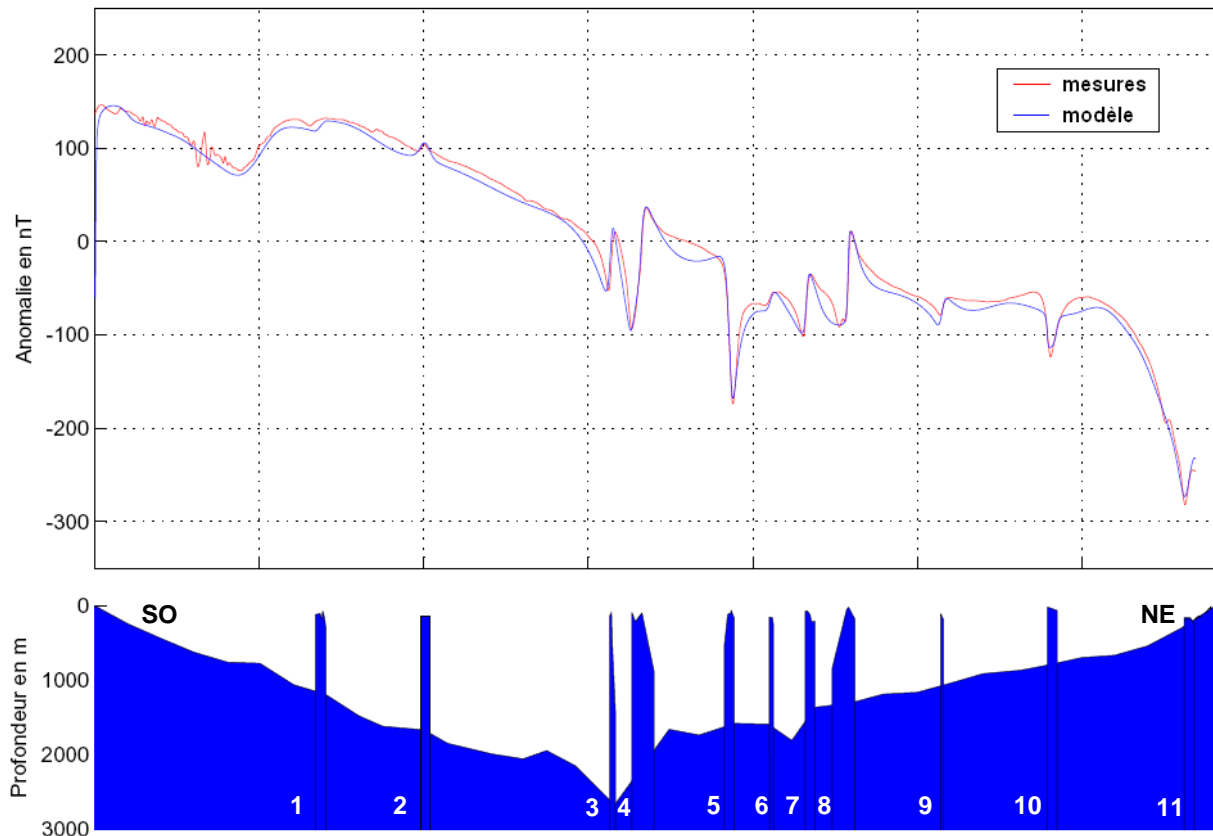


Figure 6.33 : Modélisation du profil 64 observé selon 32° de cap, AREVA09 Mounana-Bangombé.

On constate qu'un modèle constitué d'un socle entrecoupé de filons suffit pour expliquer relativement bien le profil magnétique enregistré. Soyons plus précis :

- Le modèle de socle montre clairement une allure d'effondrement. La bordure SO de cet effondrement est limitée par les socles de Chaillu et ses boutonnières. Au NE, le fossé est bordé par le môle d'Ondili. Cette vaste zone d'effondrement s'étend sur plus de 30 km et son centre se situe sous la dépression d'Okouma-Bangombé où près de 2000 mètres de dépôts se sont accumulés. La valeur de susceptibilité de $2 \cdot 10^{-2}$ SI utilisé dans la modélisation pourrait correspondre à celle d'un socle granitique composé de minéraux ferrimagnétiques.
- La couverture sédimentaire de la série francevillienne a une aimantation négligeable par rapport à celle du socle. En effet, les grès, constituants majeurs des dépôts du bassin, ont une susceptibilité magnétique 100 fois plus faible que celle des granites. C'est pourquoi, nous l'avons considéré nulle dans la modélisation.
- Les onze filons modélisés présentent tous une structuration verticale ou sub-verticale dans le plan de la modélisation. Ils traversent les formations sédimentaires sur toute leur épaisseur et s'enracinent au niveau du socle. La profondeur moyenne de leur toit se situe à 20 m. Ce résultat est en accord avec l'estimation d'un maximum de 80 m issue de

l'inversion 2D par couche équivalente proposée au **paragraphe 6.4.4.1.2**. Ces filons sub-affleurants présentent une extension horizontale décamétrique et semblent s'élargir en profondeur pouvant atteindre un développement hectométrique. Le tableau indique par ailleurs les valeurs de la susceptibilité et de la direction d'aimantation de chaque filon modélisé. Nous constatons, que leur susceptibilité vaut en moyenne $3 \cdot 10^{-3}$ et que dans neuf cas sur onze, il a fallu considérer une aimantation rémanente. Ce modèle semble donc suggérer un remplissage magmatique des filons dissocié et postérieur à la formation du socle. Les observations géologiques suggèrent, en effet, une injection tardive de dolérite. La littérature propose des valeurs de susceptibilité pour la dolérite situées dans une gamme légèrement plus haute, allant de $3 \cdot 10^{-3}$ SI (Sankaran et al., 2005) à $4 \cdot 10^{-2}$ SI (Aifa et Lefort, 2000) en passant par $1 \cdot 10^{-2}$ SI (Singh et Rao, 1970).

En outre, il est intéressant de noter que le signal magnétique mesuré est essentiellement celui du socle, comme le montre la **figure 6.34**. À *gauche*, nous présentons le modèle de socle issu de la modélisation précédente, à *droite* nous modifions légèrement sa géométrie pour diminuer l'écart entre les valeurs mesurées et celles modélisées. Dans les deux cas, on retrouve bien un profil d'effondrement.

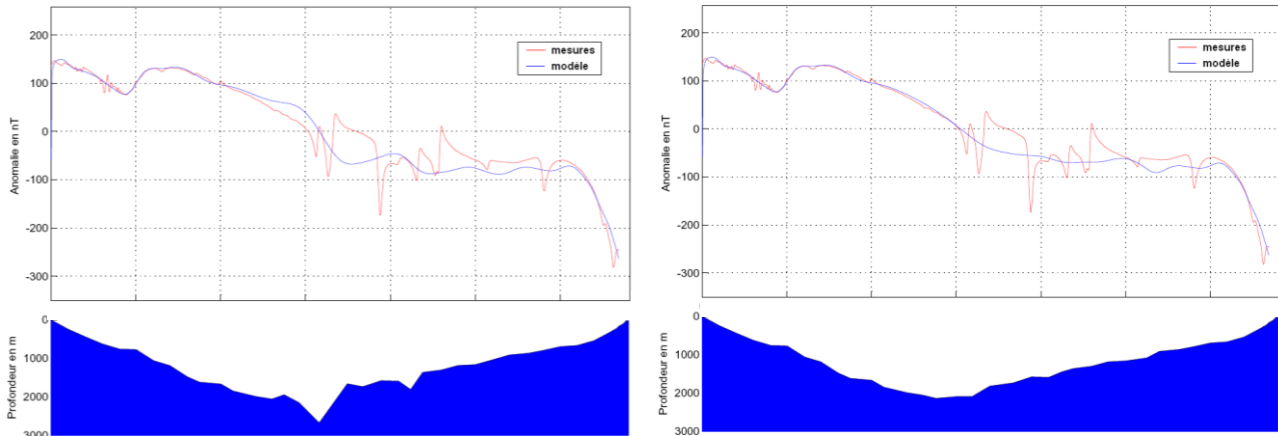


Figure 6.34 : Modélisation du signal lié au socle obtenu par la modélisation précédente (à gauche). Ce modèle de socle est amélioré sur la vignette de droite. Profil 64, AREVA09 Mounana-Bangombé.

Enfin, il est intéressant de visualiser à la **figure 6.35** le signal engendré uniquement par les filons. Dans ce cas, la composante de grande longueur d'onde du signal est supprimée pour ne conserver que sa composante haute fréquence.

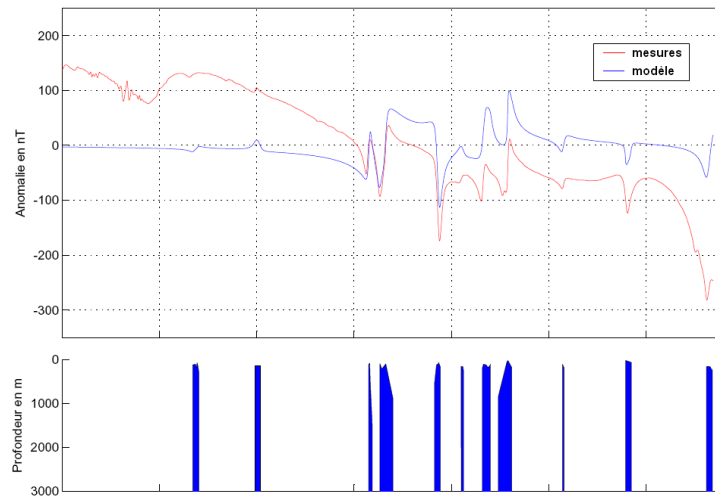


Figure 6.35 : Modélisation du signal lié aux filons. Profil 64, AREVA09 Mounana-Bangombé.

Notons que les filons 4 et 8 présentent un pendage concordant avec la géométrie d'un bassin effondré. Nous reviendrons sur ce point au **paragraphe 6.5.1.2**. Finalement, la modélisation par la méthode de Talwani a permis une analyse quantitative des données magnétiques. Elle a permis d'une part de différencier les zones d'épaississement sédimentaire des zones de socle affleurant à sub-affleurant et d'autre part de localiser et caractériser les intrusions volcaniques qui affectent le fossé.

6.4.4.2 Zone centrale de Mikouloungou-Kiééné

L'analyse structurale semi-automatique des cartes disponibles dans cette zone est présentée sur les **figures 6.36 à 6.39**.

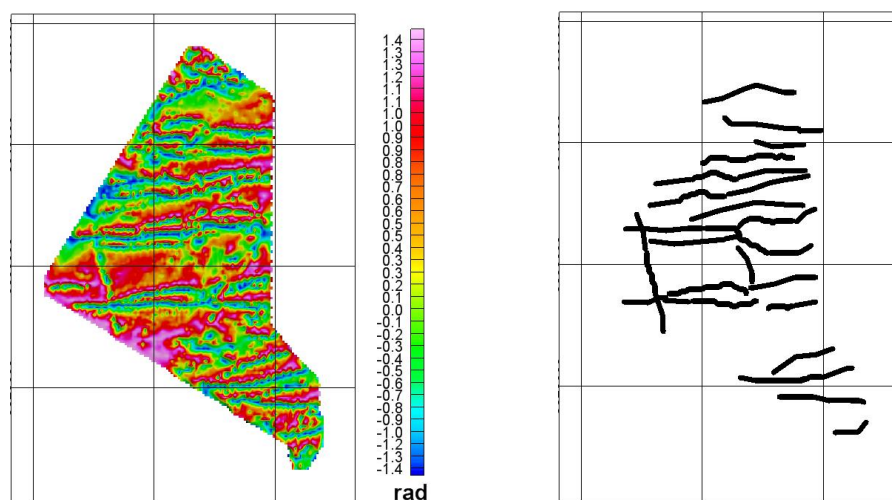


Figure 6.36 : Carte du tilt angle (à gauche) et son analyse structurale (à droite), AREVA09 Mikouloungou Kiééné Nord.

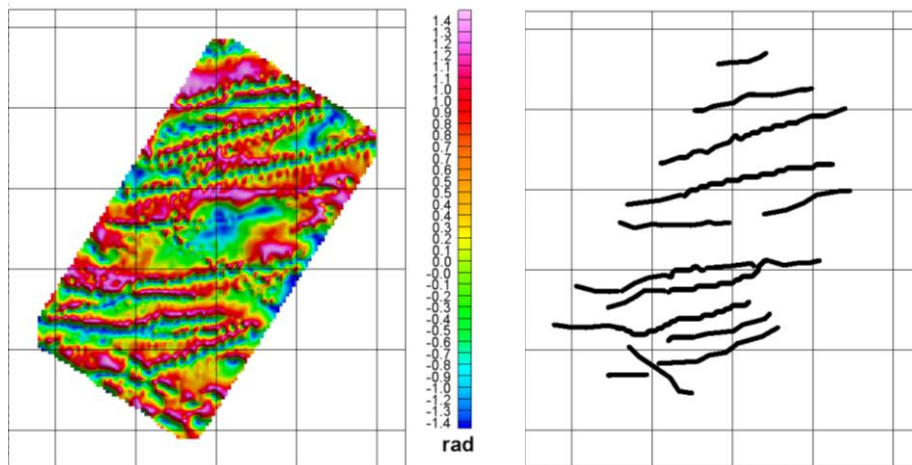


Figure 6.37 : Carte du tilt angle (à gauche) et son analyse structurale (à droite), AREVA09 Mikouloungou Kiéné Sud.

Ces transformations livrent des conclusions identiques sur la structuration du sous-sol dans cette zone. Nous retrouvons les deux grandes directions de linéaments et les estimations sur les profondeurs des objets sont proches des résultats précédents.

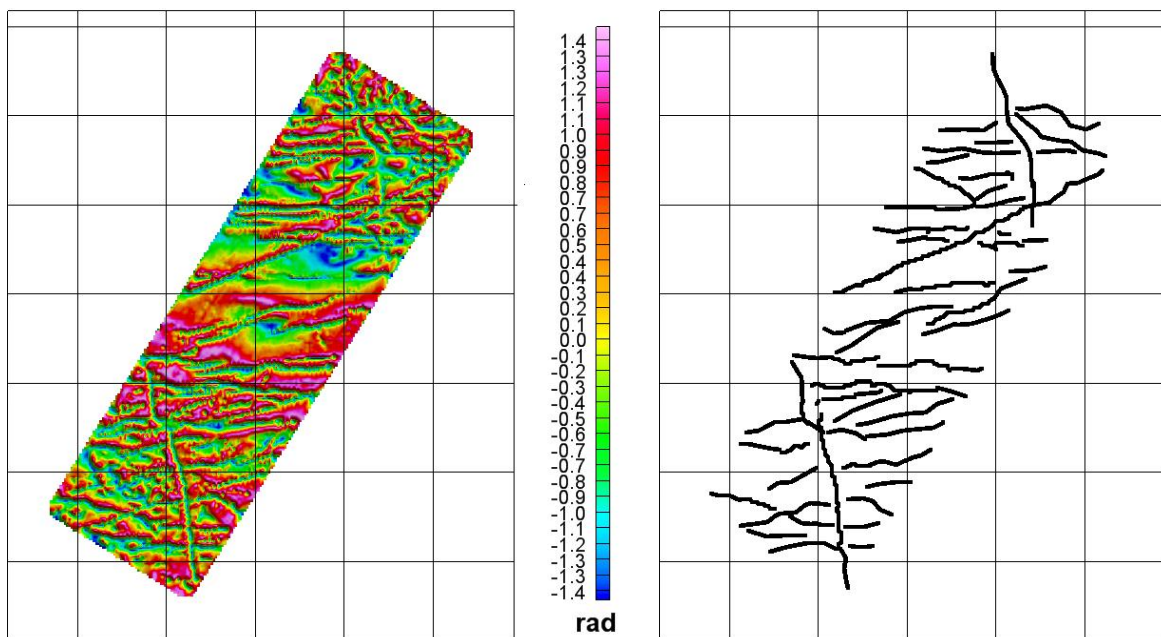


Figure 6.38 : Carte du tilt angle (à gauche) et son analyse structurale (à droite), AREVA0508 Mikouloungou.

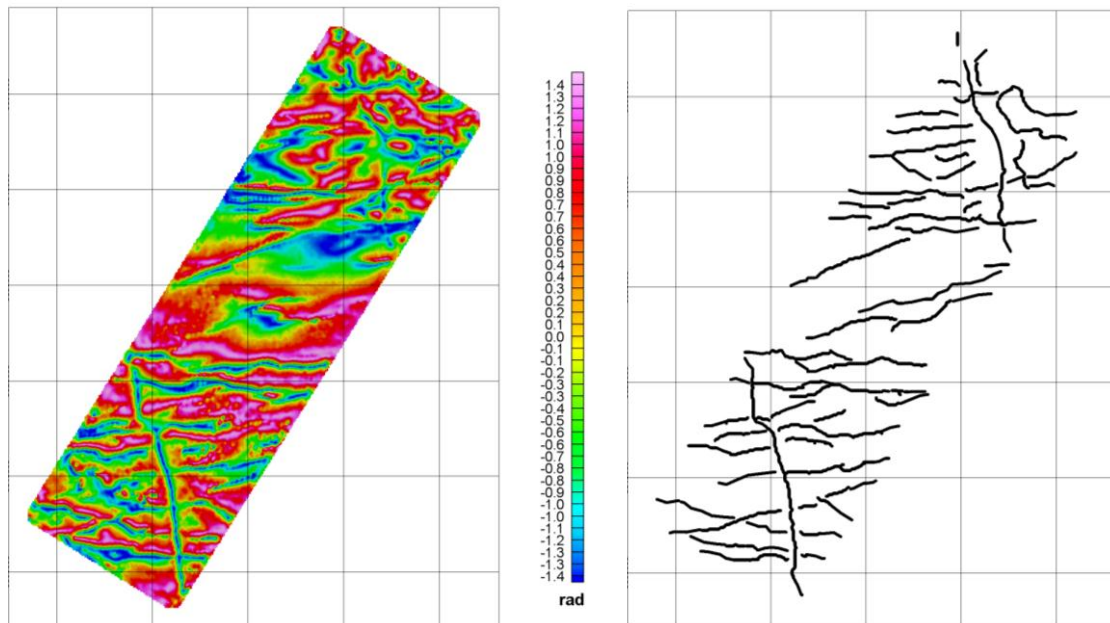


Figure 6.39 : Carte du tilt angle (à gauche) et son analyse structurale (à droite), AREVA0408 Mikouloungou.

En plus des conclusions identiques à celles du paragraphe précédent, il est intéressant de remarquer que le problème de maillage soulevé au **paragraphe 6.3.5.3.1** est clairement illustré. Sur la **figure 6.38** issue du vol à 70 m, le signal présente des effets de festonnage au voisinage des structures. Cependant, la **figure 6.39** issue du vol à 400 m, montre un signal affranchi des bruits numériques et de plus basse fréquence, où les structures de courte longueur d'onde ne sont pas détectées.

6.4.4.3 Zone orientale de Djokaye-Mopia

Nous terminons cette section par l'analyse structurale de la carte volée sur la zone de Djokaye-Mopia, exposée à la **figure 6.40**.

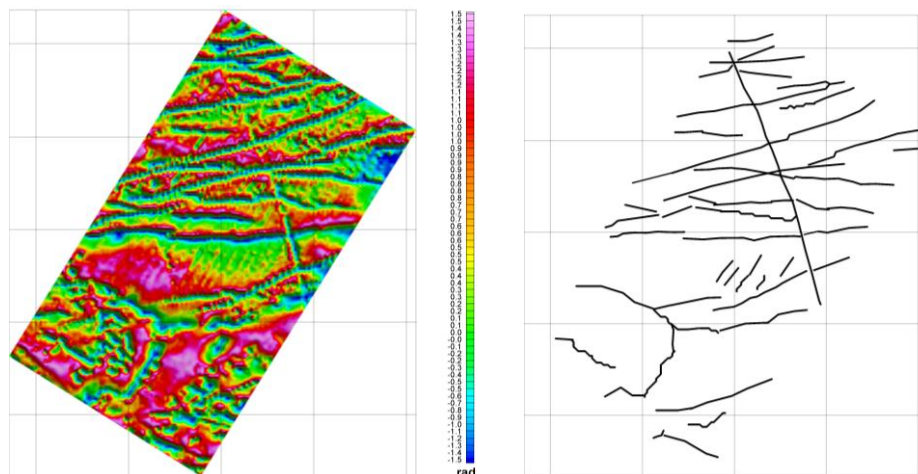


Figure 6.40 : Carte du tilt angle (à gauche) et son analyse structurale (à droite), AREVA0508 Djokaye-Mopia.

6.4.4.4 **Bilan-conclusion**

Ces premiers traitements ont permis de confirmer les connaissances géologiques sur le bassin mais aussi d'apporter des éléments nouveaux plus quantitatifs sur la géométrie des structures :

- Nous avons pu confirmer les hypothèses sur la formation du bassin, en particulier la deuxième phase extensive qui a créé des fossés d'effondrement en horsts et grabens subsidents. De plus, les analyses quantitatives issues de l'inversion 2D, du tilt angle et de la modélisation ont permis de contraindre la géométrie du socle et, par déduction, celle de sa couverture sédimentaire. Ainsi, l'aspect en « *toit d'usine* » du socle visible à la **figure 6.33** est conforté par l'allure des coupes effectuées à travers le bassin à Mikouloungou et Kiéné par Gauthier-Lafaye (1986). Chaque compartiment ainsi délimité renferme un point haut, qui se répercute sur les remplissages sédimentaires en surplomb. Si ce point haut est fermé, peut constituer un piège réducteur à uranium. Cette situation correspond aux gîtes de Mikouloungou et de Kiéné.
- Nous avons pu affiner la connaissance des filons de dolérite traversant tout le Bassin de Franceville d'Est en Ouest et du Nord au Sud. Ces derniers semblent disposés en échelon dans le secteur de Mounana-Bangombé et de Mikouloungou, laissant supposer l'existence de ramifications en failles et filons plus petits, de directions NO-SE à ONO-ESE. Cependant leurs signaux sont probablement masqués par les directions dominantes, la caractérisation de ces structurations obliques nécessite un traitement plus poussé, mené dans la section suivante.

6.5 TRAITEMENTS AMÉLIORÉS ET INTERPRÉTATION DES CARTES

6.5.1 **Zone centrale de Mikouloungou-Kiééné : Aspect multi-altitude**

La zone de Mikouloungou-Kiééné a été couverte à quatre reprises à quatre altitudes différentes. Cet aspect multi-échelle de l'acquisition est exploité à des fins plus méthodologiques qu'interprétatives au paragraphe suivant. Le **paragraphe 6.5.1.2** tente de mettre à profit cette particularité pour caractériser le pendage des structures.

6.5.1.1 Prolongements verticaux

L'idée de ce paragraphe est de prolonger vers le haut les données AREVA0508 de Mikouloungou acquises à 70 m à l'altitude du levé AREVA0408 acquises à 400 m. La **figure 6.41** permet de visualiser le résultat de ce prolongement à *gauche* ; l'étude de la différence est proposée au *milieu* et à *droite* par deux modes de représentation (équipopulation et linéaire).

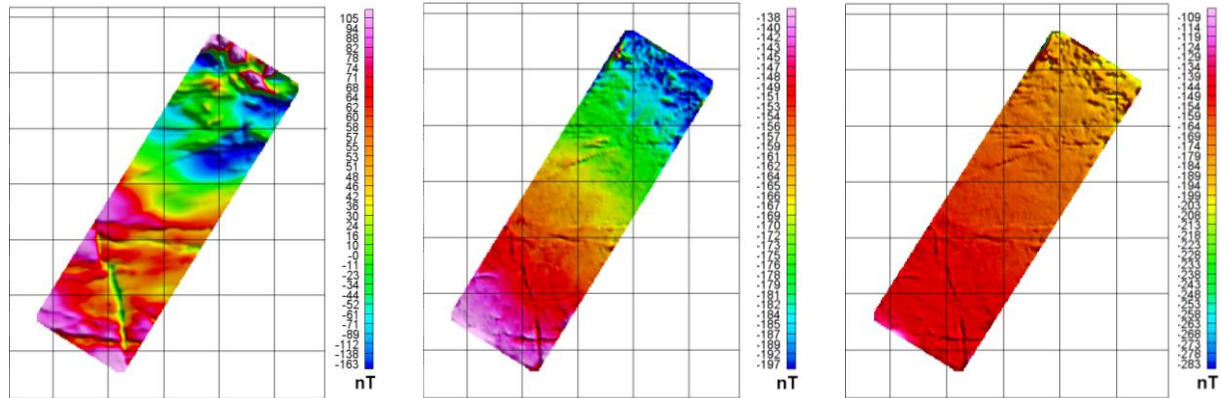


Figure 6.41 : Prolongement de 330 m vers le haut du levé AREVA0508 Mikouloungou (à gauche). Différence entre les levés AREVA0408 et AREVA0508 prolongé en équipopulation (au milieu) et en linéaire (à droite).

Il semble ressortir des deux cartes de différence, à *droite*, le gradient anomalique probablement lié au socle, déjà mis en évidence à la section précédente. L'effet des structures de proche surface telles que les filons est quasi éliminé dans cette différence. L'effet magnétique du socle présente une variabilité importante et n'est pas répercuté de la même manière dans les deux levés. Une autre piste pour expliquer cette différence serait celle d'une correction imparfaite de l'IGRF. Le même procédé est appliqué à la carte des données AREVA07 acquises à 160 m, en utilisant cette fois un prolongement vers le bas de 90 m, pour la comparer aux données AREVA0508. Les résultats sont présentés à la **figure 6.42**.

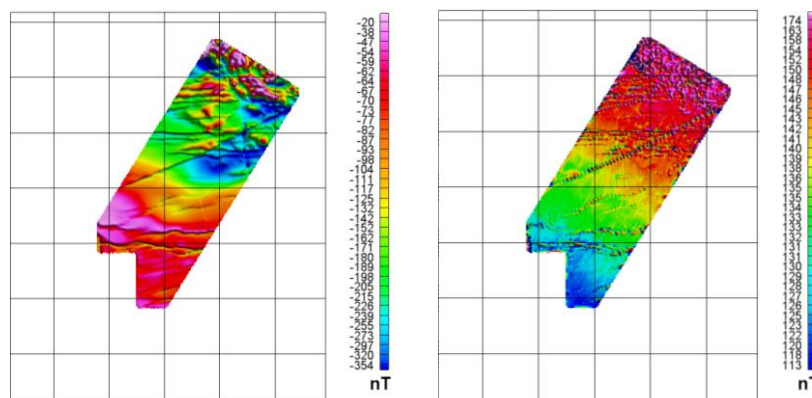


Figure 6.42 : Prolongement de 90 m vers le bas des données AREVA07 (à gauche). Différence entre les levés AREVA0508 et AREVA07 prolongé (à droite).

Le gradient SO-NE résiduel est toujours visible dans cette représentation. Son amplitude est toujours d'une soixantaine de nT mais change de signe. Dans ce cas, la carte des différences est positive contrairement à celle de la **figure 6.40**. Il semble donc qu'un prolongement vers le haut surestime la donnée tandis que le prolongement vers le bas la sous-estime. Cela pourrait faire l'objet d'une étude plus approfondie mais sort du cadre de notre étude.

6.5.1.2 Signal analytique

Le calcul de l'amplitude du signal analytique sur chacune des quatre cartes d'altitudes différentes peut mettre en évidence des décalages horizontaux dans les maxima du signal. Ces décalages peuvent être intéressants du point de vue de l'interprétation. Nous exposons ces cartes transformées sur les **figures 6.43** et **6.44**.

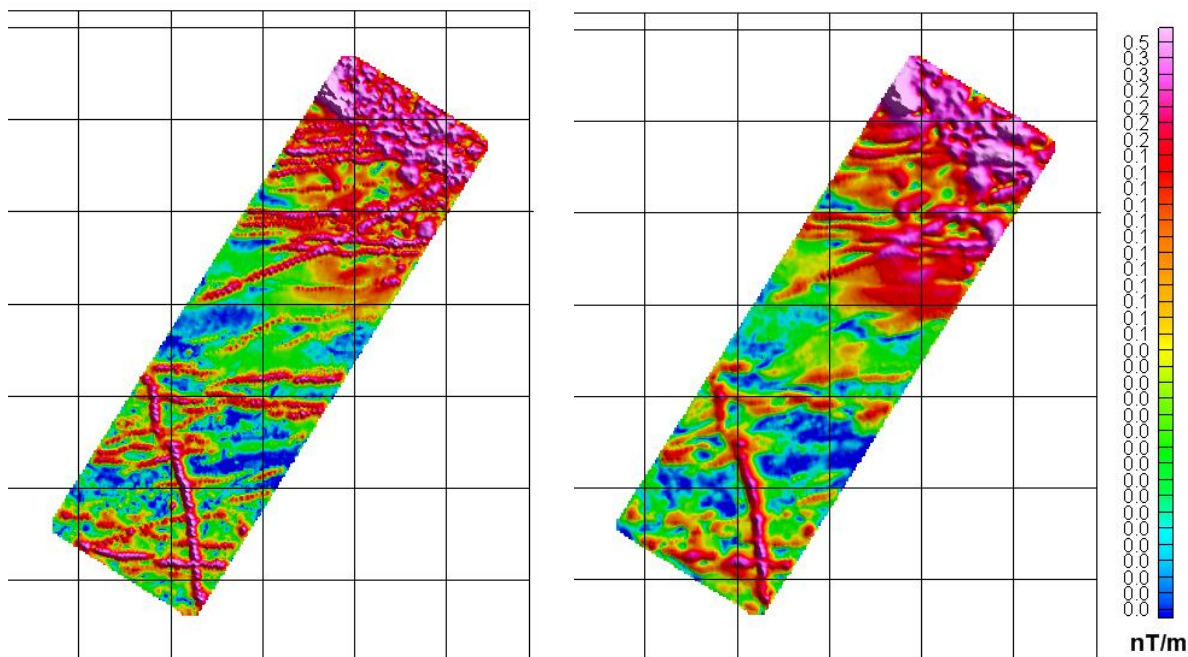


Figure 6.43 : Amplitude du signal analytique du levé AREVA0508 (à gauche) et AREVA0408 (à droite).

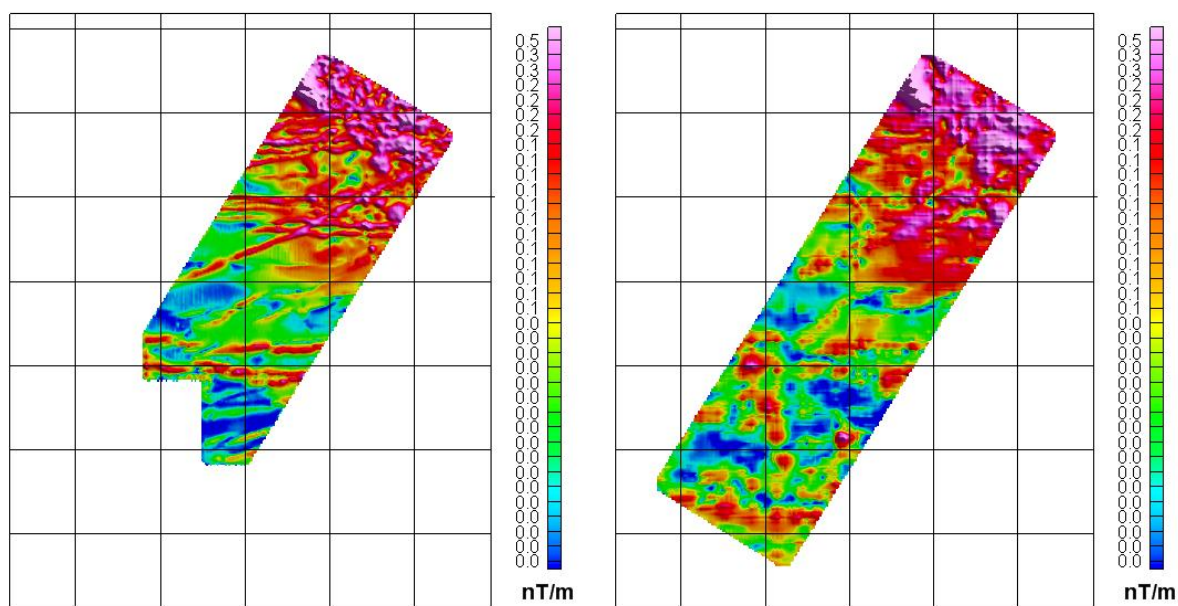


Figure 6.44 : Amplitude du signal analytique du levé AREVA07 (à gauche) et CGG83 (à droite).

Ces décalages, s'ils sont cohérents le long d'une même structure, peuvent être interprétés comme un pendage. En effet, suivant la hauteur de vol, le maximum de l'amplitude du signal analytique peut se déplacer dans le plan horizontal si l'objet détecté présente un pendage. Pour mettre en évidence cet effet, nous repérons d'abord manuellement les maxima sur chaque carte de signal analytique. Enfin, nous superposons ces lignes de maxima sur une seule carte et cerclons les décalages qui semblent cohérents. Nous avons écarté de cette étude le signal analytique du levé CGG83 de qualité insuffisante pour l'interprétation.

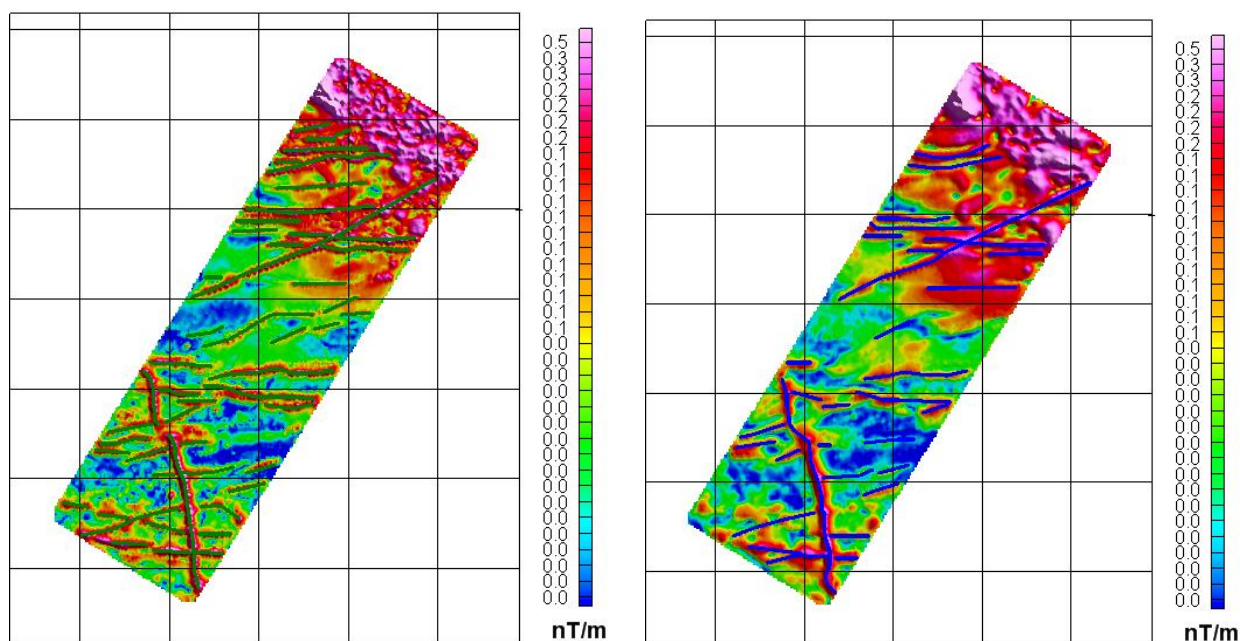


Figure 6.45 : Amplitude du signal analytique du levé AREVA0508 (à gauche) et AREVA0408 (à droite) avec détection manuelle des maxima.

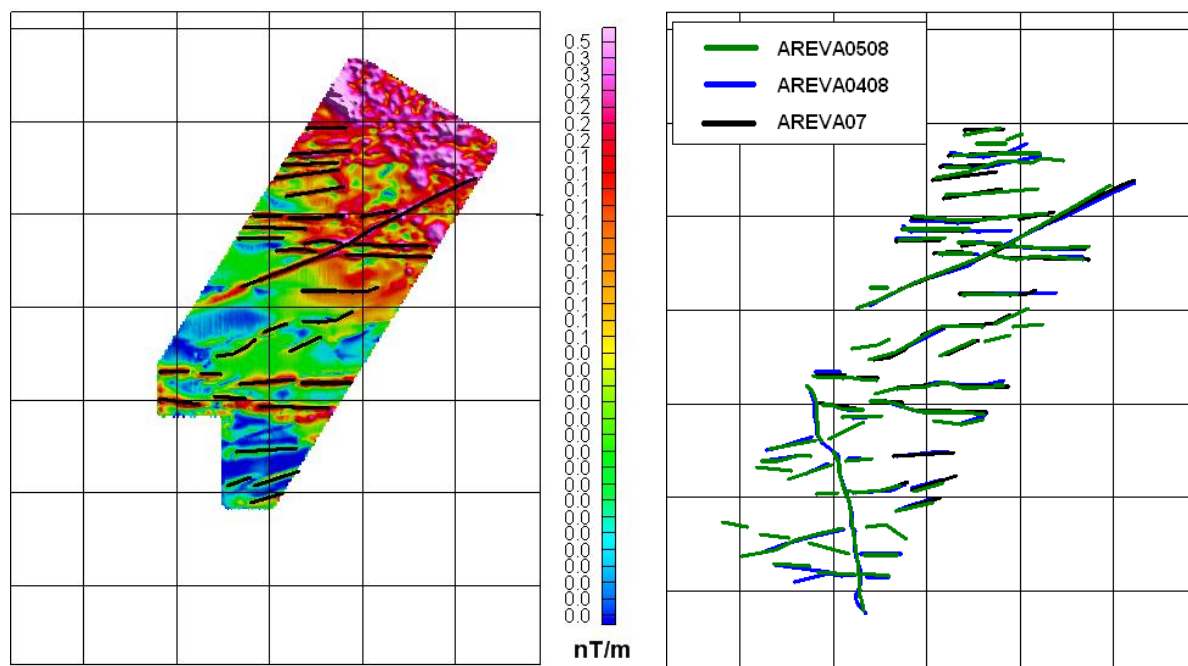


Figure 6.46 : Amplitude du signal analytique du levé AREVA07 avec détection manuelle des maxima (à gauche) et superposition des segments de maxima correspondants aux contacts issus des trois cartes (à droite).

La carte d'interprétation à droite de la **figure 6.46** rassemble les segments des amplitudes du signal analytique localement maximum correspondants à des contacts. Nous proposons un agrandissement d'échelle sur la carte de la **figure 6.47** pour permettre une lecture plus aisée des décalages.

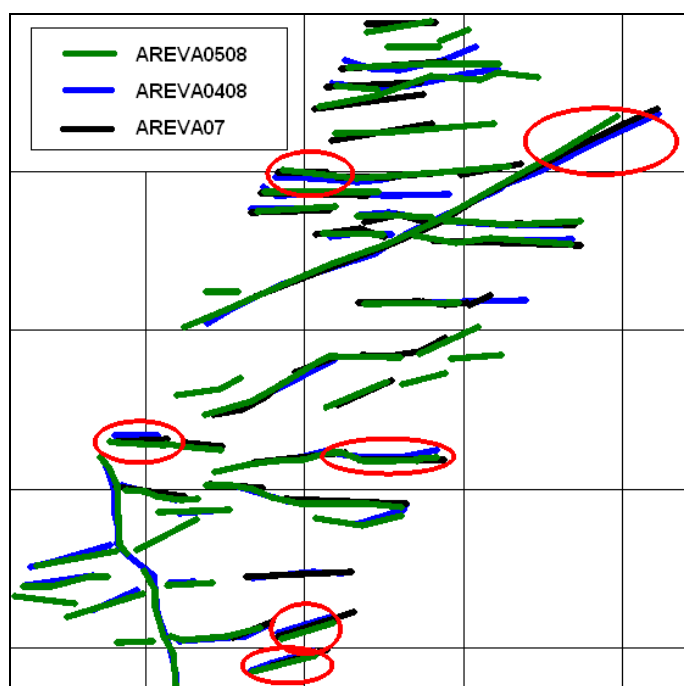


Figure 6.47 : Superposition des segments de maxima correspondants aux contacts issus des trois cartes de signaux analytiques. Les segments décalés sont cerclés en rouge.

Finalement, cette étude semble mettre en évidence sur au moins quatre structures au Sud des pentages vers le Nord et sur deux structures au Nord des pentages vers le Sud. Les autres structures ne semblent pas affectées par des pentages suffisants. Cela peut s'expliquer par les mouvements tectoniques en distension qui ont conduit à l'effondrement du socle et à une flexuration à pendage Nord dans la partie Sud et à pendage Sud dans la partie Nord.

6.5.2 Zone occidentale de Mounana-Bangombé

6.5.2.1 Superpotentiel et signaux analytiques

Dans ce paragraphe, nous reprenons les outils développés au **chapitre V** pour compléter l'interprétation géologique et structurale de la zone de Mounana-Bangombé. Les potentiels et superpotentiels d'anomalie sont représentés sur la **figure 6.48**.

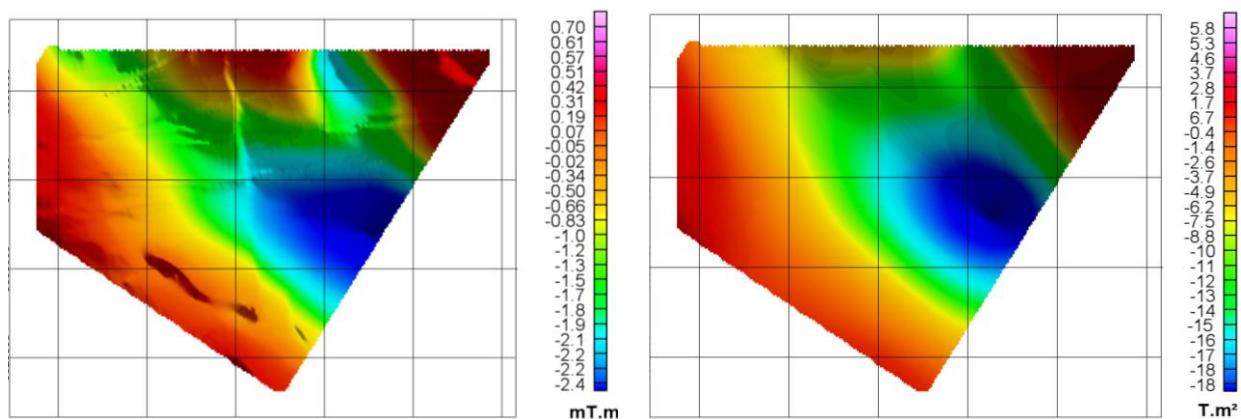


Figure 6.48 : Carte du potentiel (à gauche) et du superpotentiel (à droite), AREVA09 Mounana-Bangombé.

L'allure de ces deux fonctions permet de mettre en évidence les oscillations de basse fréquence du signal magnétique. Elles reflètent principalement les variations de la géométrie du socle : sa structure en fossé d'effondrement de direction NO-SE se devine sur les deux cartes. En effet, cette direction n'est plus masquée par le signal haute fréquence des filons. Les bords du fossé, correspondants aux limites du bassin, semble se confirmer sur ces deux cartes :

- au Sud Ouest, les abords du massif de Chaillu,
- au Nord Ouest, les boutonnières du socle de Mounana,
- au Nord Est, les contreforts du môle d'Ondili.

Par ailleurs, comme nous l'avons illustré au **chapitre V**, la fonction superpotentiel est aussi un intermédiaire de calcul pour évaluer l'amplitude du signal analytique et le tenseur de l'anomalie magnétique. Nous représentons la carte de la première fonction à *gauche* de la **figure 6.49** et la seconde sera étudiée au paragraphe suivant. En vertu du rapport **5.53** établi précédemment, l'amplitude du signal analytique combinée avec la troisième composante diagonale du tenseur permet d'établir une carte des profondeurs des sources. Cette méthode a été établie pour des sources 2D et étroites, c'est le cas des nombreux filons du bassin. Toutefois, son application élargie à l'ensemble des données donne un résultat vraisemblable. Notons que les profondeurs calculées ont été corrigées de l'altitude de vol et calées sur les toits des filons sub-affleurants caractérisés par la modélisation de Talwani. Enfin remarquons que le calcul du rapport a légèrement amplifié les bruits de haute fréquence, sans pour autant gêner l'interprétation finale. C'est l'avantage de cette méthode qui utilise des fonctions du même ordre de dérivation que l'anomalie ou que le potentiel.

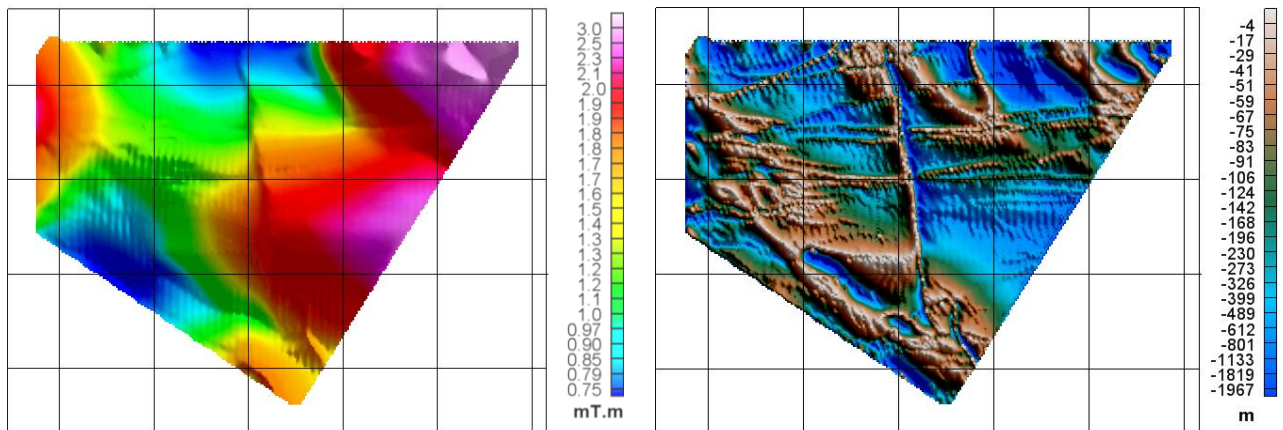


Figure 6.49 : Carte de l'amplitude du signal analytique (à *gauche*) et du rapport de l'amplitude du signal analytique du superpotentiel sur la composante Φ_{zz} du tenseur (à *droite*), AREVA09 Mounana-Bangombé.

La carte du rapport, à *droite* de la **figure 6.49**, permet de retrouver les limites du fossé d'effondrement et les estimations de profondeur du socle aimanté issues de la modélisation du profil 64. Enfin, les deux cartes confirment, outre la présence des nombreux filons quasi N-S et E-O, la structuration principalement NO-SE du bassin. Celle-ci est détaillée au paragraphe suivant.

6.5.2.2 Tenseur de l'anomalie magnétique

Le superpotentiel d'anomalie est dérivé deux fois dans les trois directions de l'espace pour obtenir le tenseur de l'anomalie magnétique, en référence à la définition **2.82**. Pour des raisons de symétrie, seuls six des neuf composantes sont affichées aux **figures 6.50** et **6.51**.

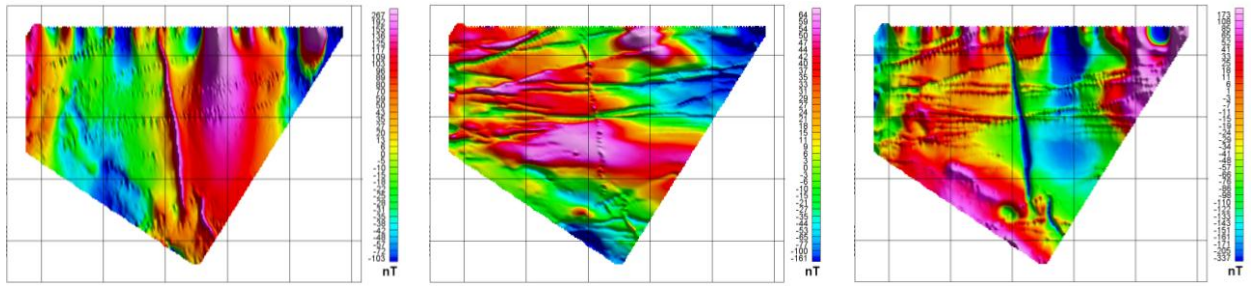


Figure 6.50 : Représentation des 3 composantes diagonales Φ_{xx} , Φ_{yy} et Φ_{zz} , AREVA09 Mounana-Bangombé.

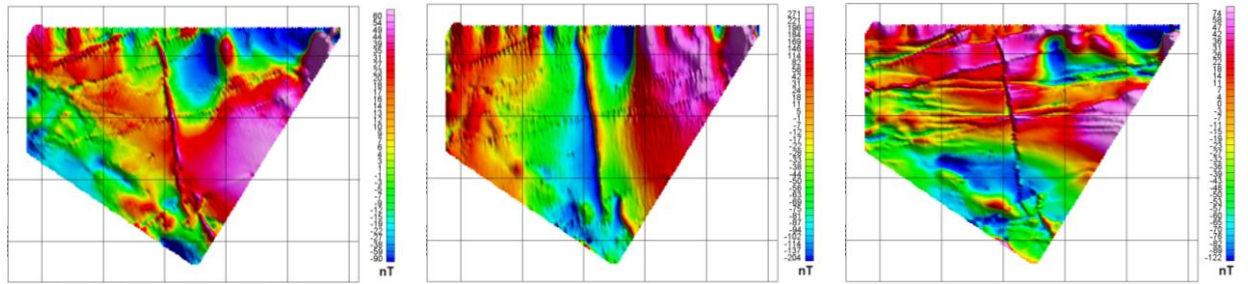


Figure 6.51 : Représentation des 3 composantes non diagonales Φ_{xy} , Φ_{xz} et Φ_{yz} , AREVA09 Mounana-Bangombé.

Une analyse structurale par le tilt angle est appliquée à chacune des six composantes du supertenseur afin de déceler plus facilement les directions principales. Sur les **figures 6.52** et **6.53**, chaque carte du tilt est accompagnée de sa carte d'interprétation structurale. Pour éviter d'amplifier les bruits de haute fréquence dans la dérivation du tilt angle, nous avons prolongé de 100 m vers le haut les composantes du **TAM**. Cela ne semble pas avoir altéré la donnée géologique.

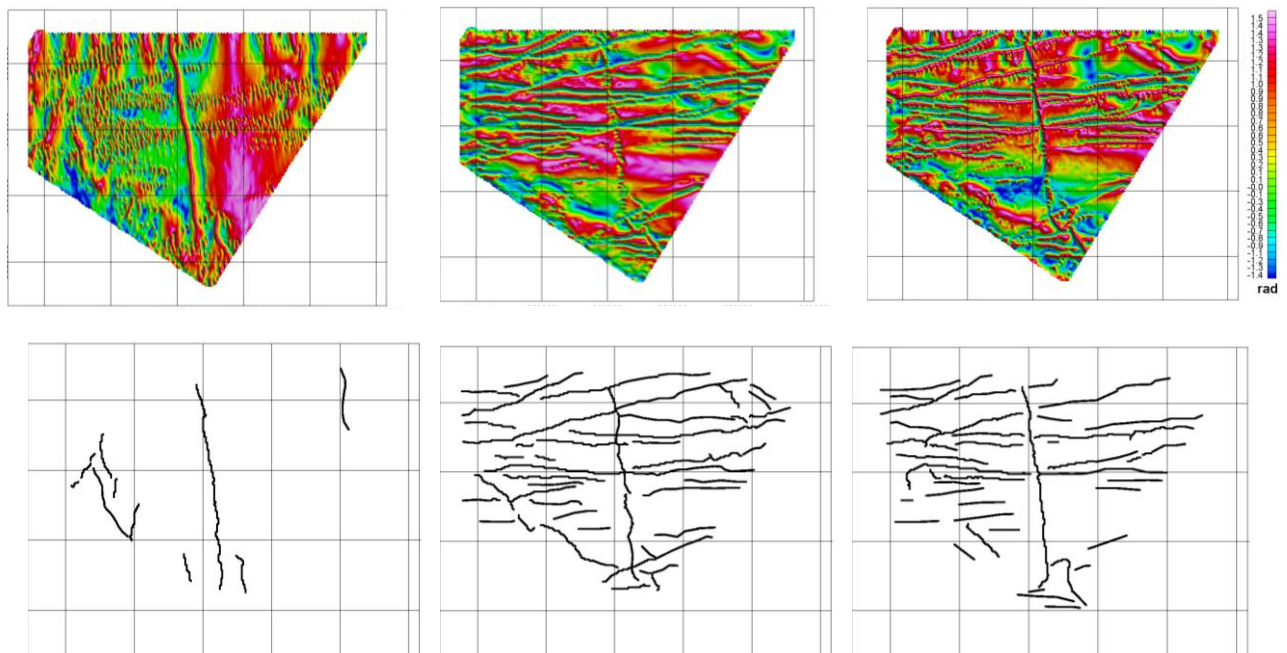


Figure 6.52 : Cartes des tilt angle des trois composantes diagonales Φ_{xx} , Φ_{yy} et Φ_{zz} prolongées de 100 m vers le haut et leurs interprétations structurales, AREVA09 Mounana-Bangombé.

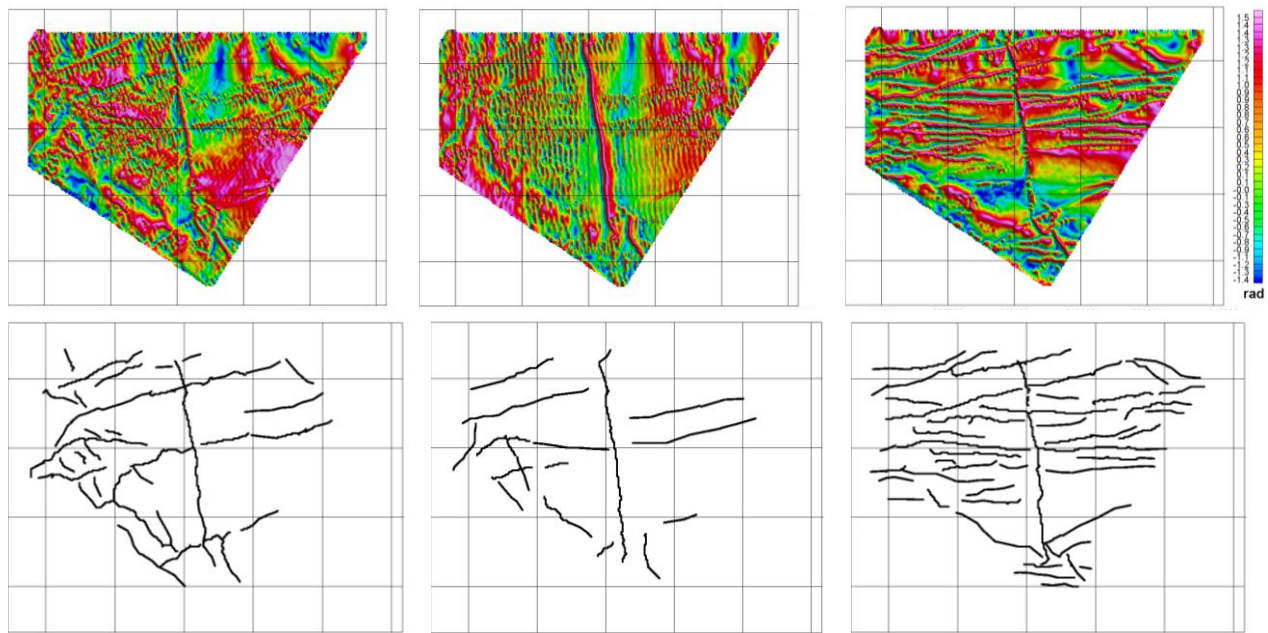


Figure 6.53 : Cartes des tilt angle des trois composantes non diagonales Φ_{xy} , Φ_{xz} et Φ_{yz} prolongées de 100 m vers le haut et leurs interprétations structurales, AREVA09 Mounana-Bangombé.

Cette analyse tensorielle permet de détecter un plus large éventail de directions :

- Les composantes xx et yy du tenseur font ressortir, respectivement, les filons d'extension N-S et E-O. Elles correspondent aux deux réductions à l'équateur, de directions orthogonales.
- La composante zz privilégie la détection des structures à contrastes verticaux de susceptibilité. En effet, cette transformation de réduction au pôle simule une acquisition où les vecteurs champ et aimantation pointeraient vers le bas.
- La composante xy se révèle particulièrement intéressante pour mettre en évidence les deux directions bissectrices du plan horizontal. Ici, c'est la structuration NO-SE du bassin qui est mise au jour dans la partie occidentale du bassin.
- Les composantes xz et yz du tenseur redonnent principalement les structurations filoniennes bien connues.

L'étude des accidents NO-SE relève d'un intérêt particulier pour la prospection uranifère. Le paragraphe suivant met en œuvre un opérateur du traitement du signal pour y parvenir.

À titre de comparaison, nous donnons sur la **figure 6.54** les six composantes du tenseur du gradient magnétique.

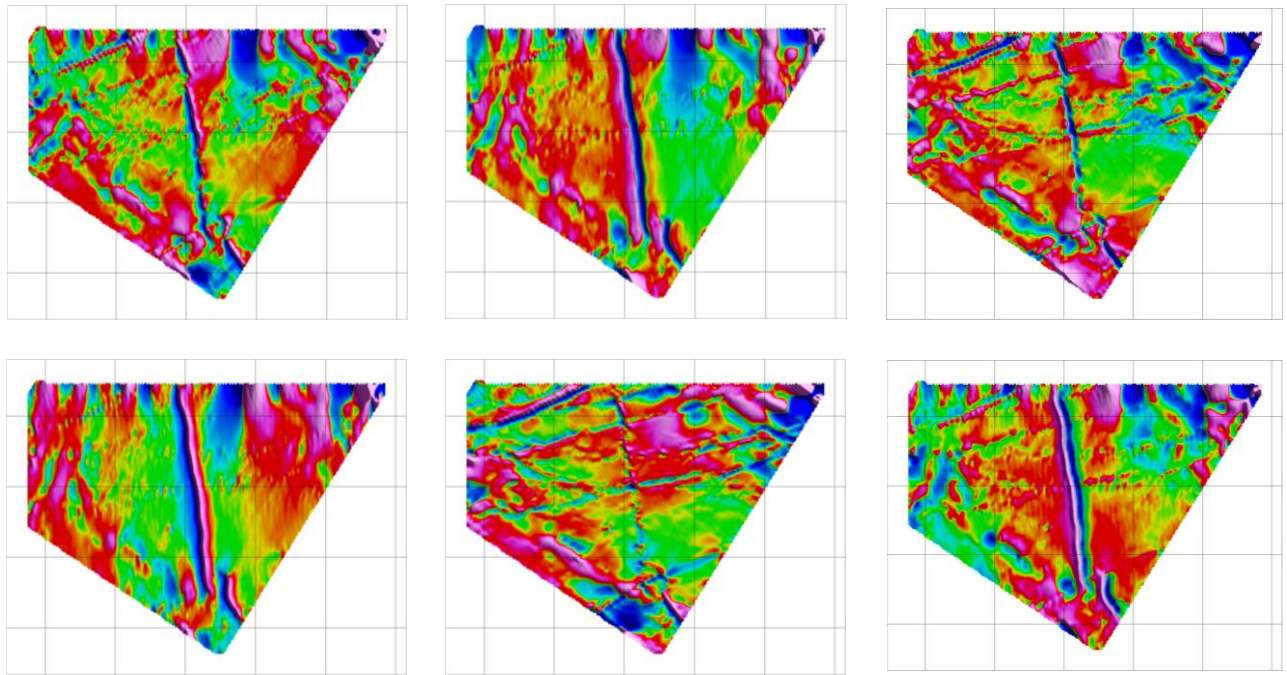


Figure 6.54 : Représentation des six composantes du tenseurs du gradient magnétique U_{xx} , U_{yy} et U_{zz} (en haut) et U_{xy} , U_{xz} et U_{yz} (en bas) prolongées vers le haut de 400 m, AREVA09 Mounana-Bangombé (en nT.m⁻¹).

Nous nous n'attarderons pas sur l'interprétation du **TGM** car les linéations magnétiques visibles sur ses composantes ne sont pas à l'aplomb des structures. Remarquons l'aspect fortement bipolaire de l'anomalie créée par le grand filon N-S ; ceci est caractéristique des anomalies non réduites au pôle. De plus, nous avons dû appliquer un fort prolongement vers le haut de 400 m pour faire disparaître les bruits numériques de traitement lié à la qualité insuffisante des données. Certaines structures de courtes longueurs d'onde ont disparu dans ce traitement.

6.5.2.3 Filtrage directionnel

Les outils de transformation de carte mis en œuvre aux paragraphes précédents ont permis de prouver l'existence physique de directions obliques, cependant les filons de direction méridienne ou longitudinale obèrent notablement leur signature magnétique. C'est pourquoi, l'usage d'un opérateur de filtrage directionnel semble pertinent pour isoler ces linéations potentiellement uranifères. Nous appliquons cet opérateur, décrit au **paragraphe 6.4.2.6**, à la composante xy du tenseur obtenue au paragraphe précédent afin d'atténuer les deux directions filoniennes ($\alpha = 175^\circ$ et $\alpha = 76^\circ$) de façon relativement douce ($n = 1$). Le résultat obtenu est ensuite traité par l'opérateur de tilt angle, dont nous prenons le module de ses deux dérivées

horizontales pour visualiser uniquement les zones de contact. Le résultat final est représenté à la **figure 6.55**.

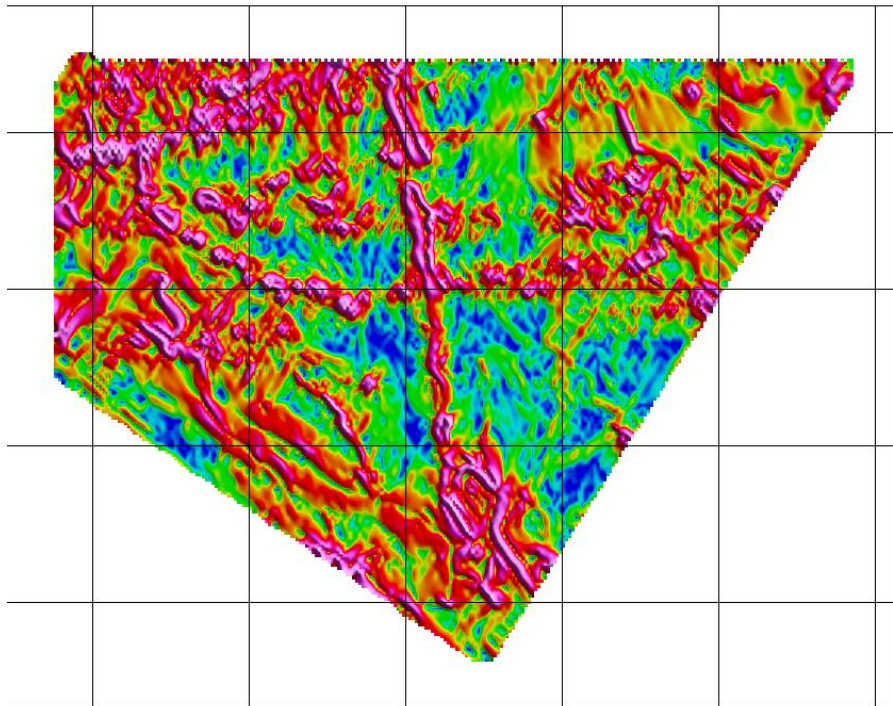


Figure 6.55 : Module des dérivées horizontales du tilt angle de la composante Φ_{xy} filtré selon les directions sub-méridiennes et sub-longitudinales prolongé de 100 m vers le haut, AREVA09 Mounana (en rad.m^{-1}).

Cette carte fait clairement apparaître de nouvelles structures de directions NO-SE dans la partie Sud-Ouest de la zone, non cartographiées par Gauthier-Lafaye (1986). Signalons qu'elles ne peuvent pas résulter d'artéfacts de filtrage. Il est vrai que l'atténuation des deux directions du plan horizontal pourrait artificiellement créer du signal dans les directions bissectrices. Cependant aucune direction NE-SO ne dépasse le niveau de bruit inhérent à ce type de traitement.

6.5.2.4 Analyse matricielle du tenseur de l'anomalie magnétique

Dans ce paragraphe, nous appliquons à titre expérimental les outils d'analyse matricielle introduits au **chapitre V** au tenseur de l'anomalie magnétique. Les résultats alors obtenus pour la source synthétique vont être étendus aux données de Mounana-Bangombé.

6.5.2.4.1 Trace et déterminant

En premier lieu, nous vérifions que la trace du tenseur de l'anomalie magnétique est bien nulle. En effet, nous avons montré à l'équation **2.97** que le laplacien du superpotentiel doit être nul hors des sources. Ceci est vérifié à mieux que 10^{-3} près à gauche de la **figure 6.55**. Les artéfacts restants sont probablement liés au bruit numérique apporté par les traitements successifs.

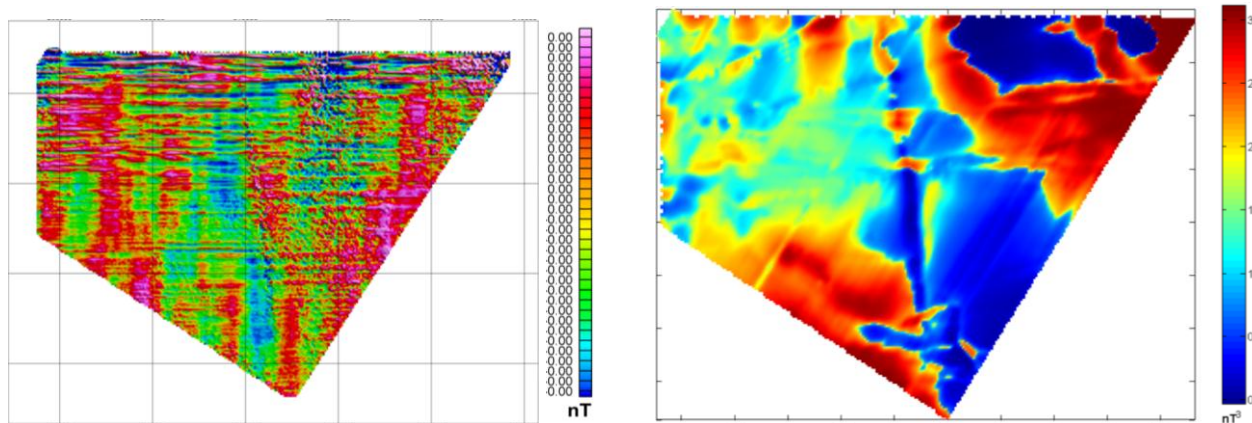


Figure 6.56 : Trace du TAM (à gauche) et son déterminant (à droite), AREVA09 Mounana-Bangombé.

Ensuite, nous calculons le déterminant du tenseur en chaque point de la grille représenté à droite de la **figure 6.56**. Nous avons montré au chapitre précédent que son principal avantage est d'atténuer la signature des objets 2D pour mieux faire ressortir les structures sans caractéristique directionnelle. La carte du déterminant propose donc une image du socle et élimine les effets magnétiques des filons purement 2D. Celle-ci est tout à fait en accord avec l'interprétation du **paragraphe 6.5.2.1** et apporte plus de précision sur la localisation des bordures du bassin. Rappelons, que ces bordures renferment à elles seules 80 % des réserves en uranium (Gauthier-Lafaye, 1986) et comprennent des gisements anciennement exploités. Enfin, la zone à subsidence maximale au centre du bassin est clairement mise en évidence, ainsi que sa remontée progressive vers le N-E jusqu'aux jaspes de Yéyé. Pour préciser un peu plus cette étude, la carte du déterminant se situant au même niveau de dérivation que l'anomalie, pourrait faire l'objet d'un traitement standard de type dérivation ou tilt angle.

6.5.2.4.2 Analyse des éléments propres

Ce paragraphe propose une nouvelle approche du traitement des cartes magnétiques en examinant les éléments propres du tenseur de l'anomalie magnétique. En vertu des propriétés du

TAM rappelées au **chapitre V**, ce tenseur se décompose en chaque point de la grille en trois valeurs propres réelles associées à trois vecteurs propres orthogonaux deux à deux. À *gauche* des **figures 6.57, 6.58 et 6.59** sont présentées respectivement les grilles des premières, secondes et troisièmes valeurs propres par ordre décroissant. À *droite* de ces mêmes figures sont accolées les grilles des composantes horizontales des vecteurs propres correspondants.

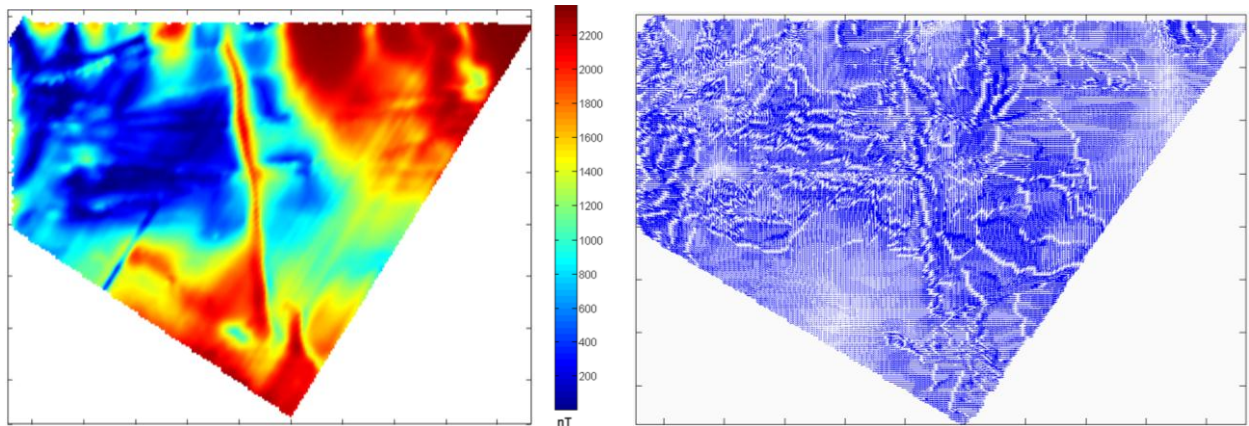


Figure 6.57 : Premières valeurs propres (à gauche) et leurs vecteurs propres associés (à droite).

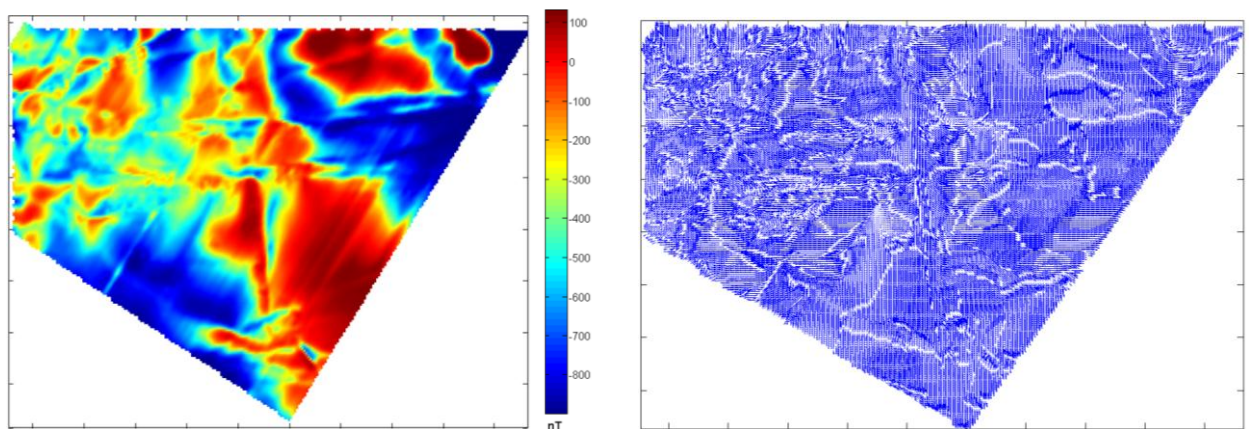


Figure 6.58 : Deuxièmes valeurs propres (à gauche) et leurs vecteurs propres associés (à droite).

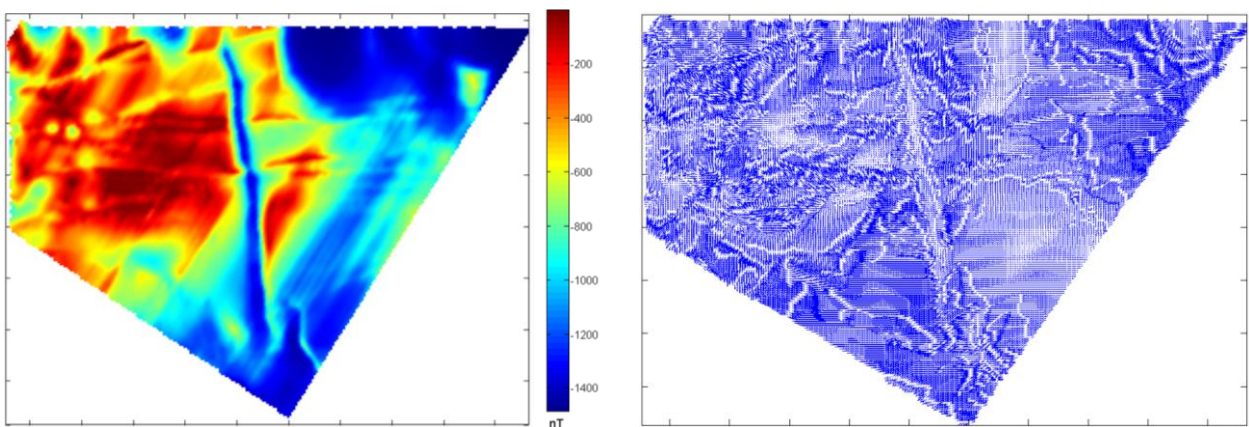


Figure 6.59 : Troisièmes valeurs propres (à gauche) et de leurs vecteurs propres associés (à droite), AREVA09 Mounana-Bangombé.

L'examen attentif des cartes de valeurs propres montrent que :

- La première et la troisième grille sont quasi de signe opposé et dans un rapport compris entre le simple et le double, confirmant les affirmations du **paragraphe 5.2.3.1**. Le lieu des points proche du rapport simple sont plutôt les structures 2D (failles et filons) et celui proche du rapport double sont plutôt le reflet de structure 3D (socle). Cette distinction sera reprise au paragraphe suivant.
- La deuxième grille est très similaire à celle du déterminant au signe près. En effet, les propriétés de la seconde valeur propre énoncées au **paragraphe 5.2.3.1** montrent aussi une détection préférentielle des structures 3D au détriment des objets 2D.

Enfin, les cartes des vecteurs propres offrent une vision originale et peu courante des discontinuités magnétiques. Les points où s'annule la norme des composantes horizontales des vecteurs propres dessinent des linéations. Celles-ci viennent souvent confirmer des informations obtenues aux cartes précédentes. Par ailleurs, il peut être intéressant de repérer aussi le lieu des points où cette norme est maximale. Cette information étant difficilement visible sur les représentations précédentes, nous représentons les valeurs de ces normes à la **figure 6.60**.

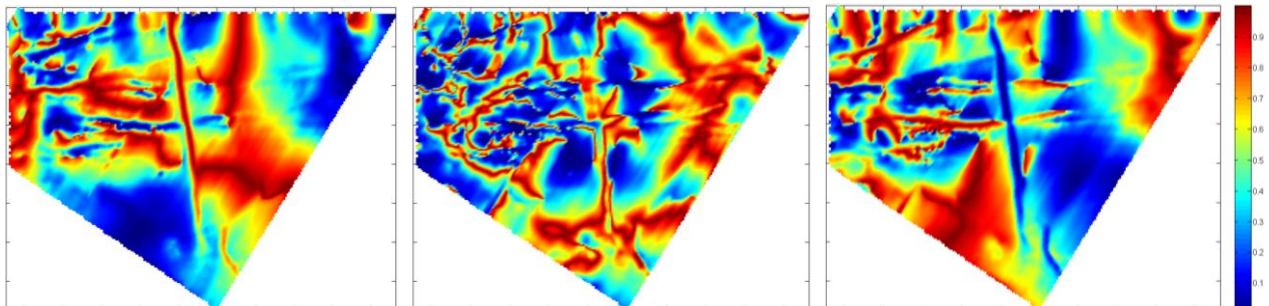


Figure 6.60 : Norme des composantes horizontales des premiers, deuxièmes et troisièmes vecteurs propres en chaque point de la grille (respectivement de gauche à droite), AREVA09 Mounana-Bangombé.

L'observation conjointe des composantes horizontales des vecteurs propres et de leurs normes permet de mettre en évidence et de localiser les quatre directions majeures du bassin :

- les deux directions filoniennes N-160° et E-O, sur les cartes des premiers et troisièmes vecteurs propres ;
- les accidents NO-SE en bordure SO du bassin, sur la carte des deuxièmes vecteurs propres, qui confirment les conclusions du **paragraphe 6.5.2.3** ;

- les accidents NE-SO, moins fréquents mais déjà suspectés par Weber (1968), à l'Ouest du bassin et repérés sur la carte des deuxièmes vecteurs propres. Rappelons que ces accidents peuvent localement résulter de la virgation de directions E-O.

6.5.2.4.3 Indice de dimensionnalité

L'indice de dimensionnalité, défini par la relation **5.30**, est un critère mathématique permettant de distinguer les signaux résultants de structures 2D ou bien 3D. Dans l'exemple présenté à la **figure 6.61**, nous avons extrait la partie septentrionale du levé AREVA09 Mounana-Bangombé réduit au pôle, traversée par le filon majeur d'orientation subméridienne. Nous avons ensuite calculé les trois vecteurs propres en chaque point de la grille où l'indice de dimensionnalité est inférieur à 0,3. Le filon est nettement détecté et il est intéressant de noter qu'à l'aplomb de celui-ci le troisième vecteur propre s'oriente selon la direction de la structure.

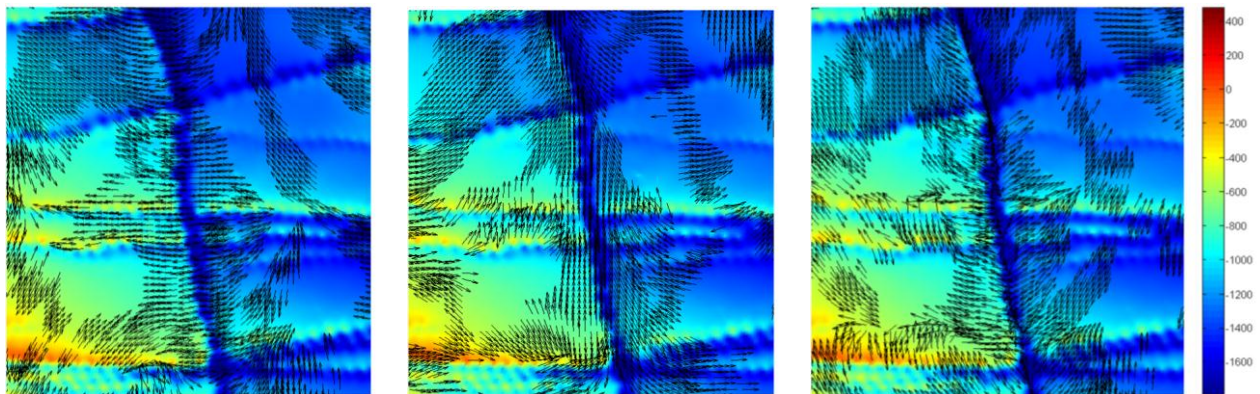


Figure 6.61 : Composantes horizontales des premiers, deuxièmes et troisièmes vecteurs propres (respectivement de gauche à droite), en chaque point de la grille réduite au pôle d'indice de dimensionnalité $I_d < 0,3$. (Nord AREVA09 Mounana-Bangombé).

Finalement cette méthode est un bon moyen de détecter une structure 2D et le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre permet d'estimer son azimuth. Cette méthode pourrait être automatisée afin de détecter les structures 2D et leur azimuth. Ceci apporterait une amélioration substantielle à la détection automatique des structures utilisée précédemment qui ne permet pas de distinguer les structures 2D des contacts 3D entre objets.

6.5.3 Bilan-conclusion

Ces traitements améliorés ont livré de nouveaux éléments permettant de mieux connaître la structure du bassin :

- Sur l'ensemble du bassin, les structures sont majoritairement à pendage vertical mais un examen attentif des **figures 6.33** et **6.47** montre que certaines structures (failles et filons) présentent un pendage Nord dans la partie méridionale (en particulier le filon **4**, **figure 6.33**) et un pendage Sud dans la partie septentrionale (en particulier le filon **8**, **figure 6.33**). Ces basculements sont en accord avec la géométrie d'un fossé d'effondrement.
- Des directions NO-SE à ONO-ESE ont été mises en évidence sur la composante xy du tenseur de l'anomalie au Sud-Ouest du bassin. Cependant cette réduction croisée peut être améliorée et sert tout au plus de prolégomènes à une étude plus sélective utilisant des filtrages directionnels. La carte de la **figure 6.55** montre nettement ces linéations NO-SE qui, à proximité d'une zone d'intérêt économique, pourrait constituer une direction uranifère.
- La direction mineure NE-SO a aussi été constatée à l'Ouest de la carte du *milieu* de la **figure 6.60**. Cette analyse nouvelle utilisant les vecteurs propres fait ressortir les quatre directions caractéristiques du bassin mais avec une faible résolution. Elle se révèle donc prometteuse mais le calcul et le tracé des vecteurs gourmands en mémoire nous ont obligés à réduire le pas de la grille de travail. Enfin, cette analyse, combinée à celle de l'indice de dimensionnalité, donne une information quantitative sur l'azimut des structures 2D.
- L'extension spatiale du bassin et, en particulier, ses bordures Sud, Nord et Ouest ont été détectées sur les cartes du déterminant et des valeurs propres du tenseur. Enfin, une approche quantitative a été tentée à droite de la **figure 6.49** pour estimer les variations de profondeur du socle.

6.6 BILAN ET CONCLUSIONS DE L'ÉTUDE GÉOPHYSIQUE

Au terme de cette étude des données aéromagnétiques, nous avons une meilleure vision de la structure du Bassin de Franceville, en particulier sur la zone de Mounana-Bangombé.

Il convient de rassembler les nouveaux résultats issus des traitements effectués aux **sections 6.4** et **6.5** ; les informations structurales nouvelles sont reportées sur la carte de Gauthier-Lafaye (1986) mise à jour. Des structures nouvellement mise en évidence sont proposées (en *rouge*), d'autres semblent faire l'objet d'une erreur de positionnement (en *bleu*) ; ces résultats sont synthétisés à la **figure 6.62**.

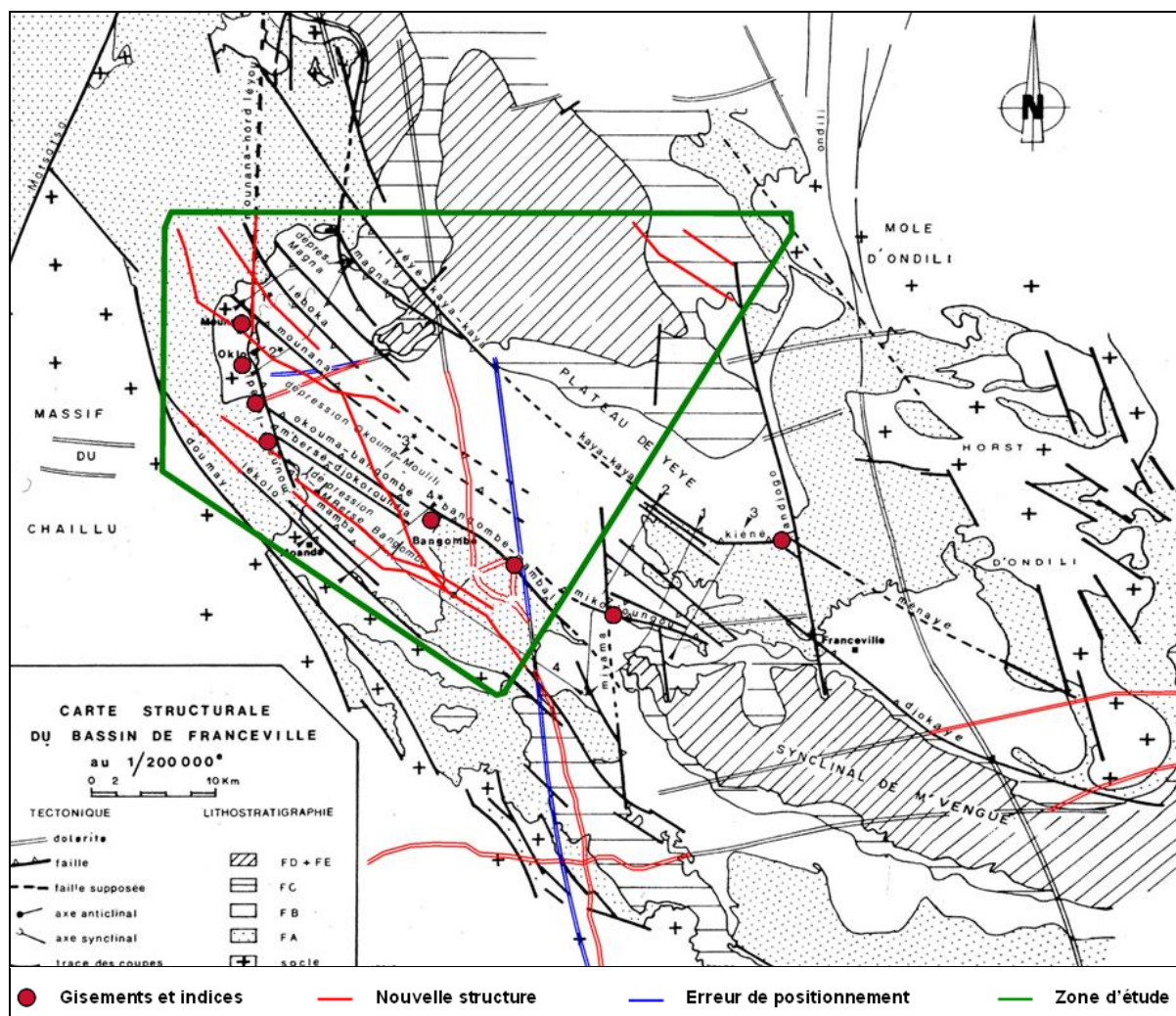


Figure 6.62 : Nouvelles propositions pour l'interprétation structurale de la zone de Mounana-Bangombé.

L'accident de Mounana-Lékédi, de direction N-S s'incurve dans sa partie méridionale selon la direction N-160°E. Il constitue la limite orientale de la boutonnière de socle de Mounana le long de laquelle se concentrent les principaux gisements d'uranium du Francevillien. Nous proposons une

nouvelle faille potentiellement uranifère de même direction, sur le bloc oriental de l'accident. Celle-ci pourrait s'expliquer par une flexuration générale des couches suivant l'axe N-160°E causée par l'effondrement du compartiment oriental de l'accident de Mounana-Lékédi. Cette faille prendrait en relais le Sud de la faille de Mounana pour être reprise dans sa partie méridionale par la faille normale NO-SE de Mamba. D'après cette hypothèse, elle devrait intercepter dans sa portion centrale les failles d'Okouma-Bangombé et de Bangombé-Mambala. Cette zone décrite par ailleurs comme un anticlinal ayant placé en position haute la limite entre les grès du FA supérieur et les pélites du FB (Gauthier Lafaye, 1986) pourrait présenter un potentiel minier intéressant.

Cette étude géophysique a aussi permis d'établir des résultats quantitatifs offrant une compréhension plus précise du Bassin de Franceville :

- La géométrie du socle en fossé d'effondrement est mieux contrainte. Sa topographie en « *toit d'usine* » a été mise en évidence par modélisation. La localisation de ses ondulations est de première importance pour en déduire la position des pièges structuraux de la couverture sédimentaire. Enfin les cartes du potentiel, rapport et déterminant donnent une image plus précise des limites géologiques du bassin ; rappelons que celles-ci s'accompagnent de minéralisations uranifères à caractère économique comme l'illustre les points rouges de la **figure 6.62**.
- Les différents traitements de cartes ont conduit à une meilleure connaissance des filons de dolérite, aussi bien en termes de localisation, de dimension que d'aimantation. Même si leur intérêt gîtologique est moindre, ils pourraient constituer des barrières de perméabilité à l'intersection de drains uranifères augmentant localement la concentration en uranium.

Conclusion Générale et Perspectives

L'objectif de cette thèse était d'améliorer certains aspects méthodologiques et appliqués des méthodes magnétiques afin d'apporter des connaissances nouvelles sur le sous-sol du Bassin de Franceville. Au terme de ce travail, nous proposons de récapituler les principaux points abordés et les résultats obtenus. Nous verrons aussi quelles perspectives géophysiques nous ouvre cette étude.

Nous avons commencé, au **chapitre I**, par les fondamentaux de la discipline en étudiant la notion d'anomalie magnétique. Cette étude liminaire a permis de pointer des difficultés rarement discutées dans la littérature. Nous avons ainsi différencié l'anomalie du champ total (AICM) et l'anomalie de projection (AICM1). Ces deux grandeurs sont couramment confondues, passant outre toute considération sur les approximations que cela sous-entend. Nous sommes parvenus à les quantifier de façon littérale. Aux chapitres suivants, nous avons appliqué ce résultat à des anomalies synthétiques et réelles. Les écarts obtenus entre les deux anomalies pouvant atteindre plus de 10 %, nous avons actualisé la formule de Lourenço afin de les réduire au maximum. Nous n'avons pas pu annuler complètement ces écarts car cela nécessite la connaissance du champ d'anomalie vectoriel. Ce problème sera entièrement résolu quand les capteurs magnétiques trois composantes seront combinés à des centrales inertielles et permettront l'acquisition simple et continue du vecteur champ d'anomalie magnétique.

Au **chapitre II**, nous avons choisi de traiter le cas particulier du dipôle magnétique avant de généraliser notre étude au **chapitre IV**. Didactiquement, il nous semblait plus clair d'introduire les six fonctions caractéristiques d'une source dipolaire avant celles d'une source quelconque. De plus, l'introduction d'un potentiel magnétique *scalaire* n'est a priori pas triviale - certains auteurs le qualifient même de « *semipotential* » (Sailhac, 1999) - et nécessite d'invoquer l'analogie mathématique entre le dipôle magnétique et le dipôle électrique. Ces six fonctions magnétiques sont construites à partir de ce potentiel, pour aboutir finalement au superpotentiel scalaire. Nous avons expliqué comment, en pratique, calculer cette nouvelle fonction à partir de la mesure de l'anomalie du champ total, en passant par l'anomalie de projection. Il faut recourir aux relations de passage que nous avons établies dans le domaine spatial puis exprimées au **chapitre III** dans le domaine spectral, plus pratique d'utilisation. Ces calculs sont menés en supposant que l'aimantation est induite par le champ extérieur, hypothèse classique et souvent vérifiée. Un

problème de calcul, inhérent au domaine spectral, est rencontré aux faibles inclinaisons. Nous avons montré qu'il relève plus d'une instabilité numérique liée à la définition de l'opérateur d'intégration que d'une impossibilité physique.

Une fois ce superpotentiel calculé, il est utilisé comme intermédiaire de calcul pour ensuite introduire le tenseur de l'anomalie magnétique. Chacune de ses neuf composantes correspond à l'anomalie de projection calculée pour une des trois directions du repère géographique du champ et de l'aimantation. Ses composantes diagonales sont les réductions à l'équateur et au pôle. Les composantes non diagonales, symétriques deux à deux, sont les réductions croisées.

Au **chapitre V**, nous nous sommes employés à montrer la pertinence du superpotentiel et du supertenseur pour l'interprétation magnétique. Nous avons traité le cas important en prospection minière de la source étroite et allongée pour illustrer des avancées en modélisation et inversion magnétiques.

Lorsque la relation de Poisson est vérifiée, le superpotentiel magnétique scalaire est strictement équivalent au potentiel gravimétrique. Ainsi, à ce niveau de dérivation, les modélisations gravimétriques et magnétiques deviennent strictement équivalentes. Les fonctions d'anomalies gravimétrique et magnétique se déduisent par dérivations, respectivement simple et double, du superpotentiel. Notre étude pourrait donc être facilement transposée au domaine de la gravimétrie.

En termes d'inversion, ces deux nouvelles grandeurs présentent l'avantage de ne dépendre d'aucune caractéristique angulaire, contrairement au potentiel et à son tenseur dérivé qui dépendent des directions d'aimantation. Ainsi, les extrema des composantes supertensorielles sont à l'aplomb des structures, contrairement aux composantes tensorielles.

L'application d'outils d'analyse matricielle classiques – tels que le calcul du déterminant ou bien la décomposition en éléments propres - a permis d'établir des résultats intéressants en termes de localisation qualitative et quantitative de structures.

Au **dernier chapitre**, nous avons testé notre nouvelle chaîne de traitement impliquant le superpotentiel et son supertenseur afin de rechercher des cibles potentiellement uranifères. Nous avons concentré notre travail sur le Bassin de Franceville, là où les données bibliographiques sont les plus nombreuses et les plus prometteuses en indices d'uranium. Nos traitements supertensoriels, situés au niveau de dérivation de l'anomalie se sont révélées adaptés à la qualité imparfaite des données. Les effets de festonnage sont fâcheusement amplifiés sur des cartes de dérivée première ou seconde. De plus, d'après les reconnaissances géologiques et gîtologiques antérieures, les directions tectoniques recherchées sont obliques et leur signature magnétique masquée par les

directions NS et EO. Par conséquent la composante xy du **TAM** s'est révélée de nature heuristique. Notons que les autres directions du plan auraient pu être décelées par simples rotations du supertenseur. Les structures nouvellement proposées dans la conclusion du chapitre devront être validées par des structuralistes et des géologues de terrain. Par ailleurs, seules des données magnétiques ont été acquises sur cette zone et il serait intéressant de disposer de données gravimétriques à des fins méthodologiques et prospectives pour valider nos hypothèses.

D'autres traitements, comme les ondelettes tensorielles à trois dimensions (Sailhac, 1999 ; Sailhac et Gibert 2003), pourraient être utilisés par la suite pour affiner nos conclusions.

“ Il n'y a plus qu'à regarder droit devant soi, ou à fermer les yeux : si nous tournions la tête, le vertige ramperait jusqu'à nous. ”

André Breton/Philippe Soupault

Les Champs Magnétiques, La Glace sans tain, Octobre 1919

Liste des Grandeurs et Variables utilisées

Scalars :

A : Signal analytique	W : Potentiel scalaire gravimétrique
C_x, C_y, C_z : Composante de \vec{C} dans le repère terrestre	X, Y, Z : axes et variables du repère terrestre de référence
D : Déclinaison du champ de référence, angle entre Ox et \vec{R}_h	$a = 2\cos\alpha$ (posé)
F : Anomalie de l'intensité du champ magnétique terrestre (AICM) ou anomalie du champ total	d : Déclinaison du moment, angle entre Ox et \vec{m}_h
F_1 : Premier terme du développement limité de F (AICM1) ou anomalie de projection	e : Charge élémentaire de l'électron ($1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$)
F_2 : Deux premiers termes du développement de F (AICM2)	\hbar : Constante de Planck réduite ($1.055 \times 10^{-34} \text{ J.s}$)
I : Inclinaison du champ de référence, angle entre \vec{R}_h et \vec{R}	i : Inclinaison du moment, angle entre \vec{m} et \vec{m}_h
I_0 : Intensité du courant circulant dans la boucle de courant générant un moment magnétique	$\binom{k}{j}$: Coefficient binomial de l'analyse combinatoire
L, M, N : Cosinus directeurs du champ dans le repère terrestre, composante du vecteur $\vec{\rho}$	l, m, n : Cosinus directeurs de l'aimantation dans le repère terrestre, composante du vecteur $\vec{\mu}$
N_j^k : Coefficient associé aux nombres de Catalan avec k et j entiers naturels	m_0 : Norme du moment magnétique dipolaire, on
P_n : Polynôme de degré n .	$\tilde{m}_0 = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi}$: Posé pour le calcul dans le domaine spatial 2D
P : Fonction de Heaviside	$\tilde{\tilde{m}}_0 = \frac{\mu_0 m_0}{8\pi^2}$: Posé pour le calcul dans le domaine spectral 2D
R : Norme du champ de référence	$\tilde{\tilde{\tilde{m}}}_0 = \frac{\mu_0 m_0}{16\pi^3}$: Posé pour le calcul dans le domaine spectral 3D
S_d : Expression analytique de la source dipolaire	m_e : Masse de l'électron ($9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$)
S_p : Expression analytique de la source prismatique	$p = \frac{C}{R}$ (posé)
T : Température	r : Norme du vecteur position repéré par (x, y, z)
T_c : Température de Curie	$s = \sqrt{u^2 + v^2}$ (posé)
T_p : Température de Curie paramagnétique	u, v, w : Fréquences spatiales dans les directions x, y, z
U : Potentiel scalaire magnétique	x, y, z : Axes et variables du repère terrestre local centré sur la source magnétique étudiée
V : Potentiel scalaire électrique	

Liste des grandeurs et variables utilisées

Γ : Fonction Gamma

Λ : Produit scalaire de $\vec{\rho}$ par le vecteur \vec{r}

Λ_0 : Produit scalaire de $\vec{\rho}$ par le vecteur \vec{r}_0

Φ : Superpotentiel scalaire magnétique

α : Angle direct entre les vecteurs \vec{C} et \vec{R}

δ : fonction de Dirac

ε : Angle direct entre les vecteurs \vec{B} et \vec{R}

ε_0 : Permittivité électrique du vide (8.854×10^{-12}

A.s.V⁻¹.m⁻¹)

κ : Constante de Curie

λ : Produit scalaire de $\vec{\mu}$ par le vecteur \vec{r}

λ_0 : Produit scalaire de $\vec{\mu}$ par le vecteur \vec{r}_0

μ_0 : Perméabilité magnétique du vide

μ_B : Magnéton de Bohr (9.274009×10^{-24} A.m²)

μ_r : Perméabilité magnétique du milieu

χ : Susceptibilité magnétique

Vecteurs :

\vec{A} : Potentiel vecteur

\vec{B} : Champ magnétique mesuré

\vec{C} : Champ d'anomalie magnétique

\vec{E} : Champ électrostatique

\vec{H} : Excitation magnétique intrinsèque au milieu

\vec{J} : Vecteur aimantation

\vec{M} : Aimantation induite du milieu

\vec{R} : Champ de référence terrestre

\vec{R}_h : Composante horizontale du champ de référence

\vec{S} : Vecteur surface de la boucle de courant

\vec{M} : Aimantation

\vec{m}_0 : Moment dipolaire magnétique

\vec{m}_h : Composante horizontale du moment dipolaire

\vec{n}_s : Normale à la surface créée par la boucle de courant du dipôle magnétique

\vec{p}_0 : Moment dipolaire électrique.

\vec{r} : Vecteur position repéré par (x, y, z)

\vec{r}_0 : Vecteur position repéré par (x_0, y_0, z_0)

\vec{u}_r : Vecteur unitaire du repère cylindrique

$\vec{\Pi}$: Vecteur de Hertz ou superpotentiel vecteur

$\vec{\mu}$: Vecteur unitaire du moment dipolaire

$\vec{\rho}$: Vecteur unitaire du champ de référence terrestre

Matrices :

TAM : Tenseur de l'anomalie magnétique ou supertenseur

TGG : Tenseur du gradient gravimétrique

TGM : Tenseur du gradient magnétique

Opérateurs :

$\vec{\nabla}$: Gradient

∇_μ : Dérivation oblique dans le sens de $\vec{\mu}$

∇_ρ : Dérivation oblique dans le sens de $\vec{\rho}$

Δ : Laplacien

$H_{SA_n}(f)$: Amplitude du signal analytique d'ordre n de la fonction f

TF : Transformée de Fourier directe

Bibliographie

Abragam, A., 1961, Principles of Nuclear Magnetism, *Oxford University Press*, London.

Aifa, T., Lefort, J. P., 2000, Fossilisation des contraintes régionales miocènes sous climat aride en bordure d'un filon doléritique carbonifère en Bretagne. Apport de l'anisotropie de la susceptibilité magnétique et du paléomagnétisme, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **330**, Ila, 15-22.

Al-Chalabi, M., 1971, Some studies relating to non-uniqueness in the gravity and magnetic inverse problem, *Geophysics*, **36**, 35-54.

Azzibrouck-Azziley, G., 1986, Sédimentologie et géochimie du Francevillien B (Protérozoïque Inférieur), Métallogénie des gisements de manganèse de Moanda (Gabon), *Thèse de doctorat de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg*, 87 p.

Baala, M., 2005, Etude quantitative des anomalies magnétiques par le signal analytique : application à des données océaniques, *Thèse de doctorat de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg*, 223 p.

Balsley, J.R., 1952, Aeromagnetic Surveying: Advances in Geophysics, *Academic Press*, New York.

Baranov, V., 1957, A new method for interpretation of aeromagnetic maps: Pseudo-gravimetric anomalies, *Geophysics*, **22**, 359-383.

Baranov, V., Naudy, H., 1964, Numerical calculation of the formula of reduction to the magnetic pole, *Geophysics*, **29**, 67-79.

Bastani, M., Pedersen, L. B., 2001, Automatic interpretation of magnetic dikes parameters using the analytic signal technique, *Geophysics*, **66**, 551-561.

Bhattachacharya, B. K., 1965, Reduction of magnetic and gravity data on an arbitrary surface acquired in a region of high topographic relief, *Geophysics*, **42**, 1411-1430.

Bhattacharyya, B. K., 1966, Continuous spectrum of the total magnetic field anomaly due to a rectangular prismatic body, *Geophysics*, **31**, 97-121.

Bhattacharyya, B. K., Navolio, M. E., 1976, A fast transform method for rapid computation of gravity and magnetic anomalies due to arbitrary bodies, *Geophysical Prospecting*, **24**, 633-649.

Bhattacharyya, B. K., Chan, K.C., 1977, Continuous spectrum of the total magnetic field anomaly due to a rectangular prismatic body, *Geophysics*, **31**, 97-121.

Blakely, R.J., 1995, Potential Theory in Gravity and Magnetic Application, *Cambridge University Press*, New York.

Borradaile, G.J, Werner, T., 1994, Magnetic anisotropy of some phyllosilicates, *Tectonophysics*, **235**, 223-248.

Bracewell, R., 2000, The Fourier transform and its applications, *McGraw Hill*, New York.

Campbell, W. C., 1997, Introduction to geomagnetic fields, *Cambridge University Press*, New York.

Briggs, I. C., 1974, Machine contouring using minimum curvature, *Geophysics*, **39**, 39-48.

Callot, J.-P., Robion, P., Sassi, W., Guiton, M.L.E., Faure, J.-L., Daniel, J.-M., Mengus, J.-M., Schmitz, J., 2010, Magnetic characterisation of folded aeolian sandstones: Interpretation of magnetic fabrics in diamagnetic rocks, *Tectonophysics*, **495**, 230-245.

Cardano, G., 1545, Artis Magnæ, Sive de Regulis Algebraicis Liber Unus, Basileae.

Chevalier L., Makanga, J. F., Thomas, R. J., 2002, Notice explicative de la carte géologique de la République Gabonaise (1 :1000000), Concil for geoscience, Private bag X112, South Africa.

Cordell, L., Grauch, V.J.S., 1982, Mapping basement magnetization zones from aeromagnetic data in the San Juan Basin, New Mexico, *Society of Exploration Geophysicists*, 52nd Annual Meeting, Abstracts and Bibliographies, 246-247.

Cortial, F., Gauthier-Lafaye, F., Lacrampe-Couloume, G., Oberlin A., Weber F., 1990, Characterization of organic matter associated with uranium deposits in the Francevillian Formation of Gabon (Lower Proterozoic). *Organic Geochemistry*, **15**, 73-85.

Debeglia, N., Martelet, G., Perrin, J., Truffert, C., Ledru, P., Tourlière, B., 2006, Semiautomated structural analysis of high resolution magnetic and gamma-ray spectrometry airborne surveys, *Journal of Applied Geophysics*, **58**, 13-28.

D'Errico, J., 2010, Surface Fitting Using Gridfit, Matlab Central, the Mathworks, Inc.: Natick, MA, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8998-surface-fitting-gridfit>.

Dunlop, D. J., Özdemir, Ö., 1997, Rock magnetism: Fundamentals and frontiers, *Cambridge University Press*, New York.

Durand, E., 1968, Magnétostatique, *Masson*, Paris.

Du Tremolet de Lacheisserie, E., 1999, Magnétisme II : Matériaux et application, *PUG*, Grenoble.

El Albani, A., Bengtson, S., Canfield, D.E., Bekker, A., Macchiarelli, R., Mazurier, A., Hammarlund, E. U., Boulvais, P., Dupuy, J.J., Fontaine, C., Fürsich F.T., Gauthier-Lafaye, F., Janvier, P., Javaux, E., Ossa Ossa, F., Pierson-Wickmann, A.C., Riboulleau, A., Sardini, P., Vachard, D., Whitehouse, M., Meunier, A., 2010, Large colonial organisms with coordinated growth in oxygenated environments 2.1 Gyr ago. *Nature*, **466**, 100-104.

Fedi, M., Florio, G., 2003, Decorrugation and removal of directional trends of magnetic fields by the wavelet transform: application to archaeological areas, *Geophysical Prospecting*, **51**, 261–272.

Ferraccioli, F., Gambetta, M., Bozzo, E., 1998, Microlevelling procedures applied to regional aeromagnetic data: an example from the Transantarctic Mountains (Antarctica), *Geophysical Prospecting*, **46**, 177-196.

Feybesse, J.L., Johan, V., Triboulet, C., Guerrot, C., Mayaga-Mikolo, F., Bouchot, V., Eko Ndong, J., 1998, The West Central African belt: an model of 2.5-2.0 Ga accretion and two-phase orogenic evolution, *Precambrian research*, **87**, 161-216.

Finlay, C. C., Maus, S., Beggan, C. D., Bondar, T. N., Chambodut, A., Chernova, T.A., Chulliat, A., Golovkov, V. P., Hamilton, B., Hamoudi, M., Holme, R., Hulot, G., Kuang, W., Langlais, B., Lesur, V., Lowes, F.J., Luhr, H., Macmillan, S., Manda, M., McLean S., Manoj, C., Menvielle, M., Michaelis, I., Olsen, N., Rauberg, J., Rother, M., Sabaka, T. J., Tangborn, A., Toffner-Clausen, L., Thebault, E., Thomson, A. W. P., Wardinski, I., Wei, Z., Zverera, T. I., 2010, International Geomagnetic Reference Field: the eleven generation, *Geophysical Journal International*, **183**, 1216-1230.

Fitzgerald, D. J., Holstein, H., 2006, Innovative data processing methods for gradient airborne geophysical data sets, *The Leading Edge*, **25**, 87-94.

Fitzgerald, D. J., Argast, D., Paterson, R., Holstein, H., 2010, Full tensor magnetic gradiometry processing and interpretation developments, EGM 2010 International Workshop Session: Advances in Instrumentation and Data Acquisition Publication.

Fraser, D., Fuller, B., Ward, S., 1966, Some numerical techniques for application in mining exploration, *Geophysics*, **31**, 1066-1077.

Gauthier-Lafaye, F., 1986, Les gisements d'uranium du Gabon et les réacteurs d'Oklo. Modèle métallogénique de gîtes à fortes teneurs du Protérozoïque inférieur. *Thèse d'état de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, Mémoires des Sciences Géologiques*, **78**, 245 p.

Gauthier-Lafaye, F., Weber, F., 1989, The Francevillian (Lower Proterozoic) uranium ore deposits of Gabon. *Economic Geology*, **84**, 2267-2285.

Gauthier-Lafaye, F., Holliger, P., Blanc, P.L., 1996, Natural fission reactors in the Franceville basin, Gabon: A review of the conditions and results of a “critical event” in a geologic system. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, **60**, 4831-4852.

Gauthier-Lafaye, F., Weber, F., 2003, Natural nuclear fission reactors: time constraints for occurrence, and their relation to uranium and manganese deposits and to the evolution of the atmosphere, *Precambrian Research*, **120**, 81-100.

Geosoft, 2011, Tutorial MAGMAP Filtering 2D Frequency Domain Processing of Potential Data Extension for Oasis Montaj Software, Geosoft Inc.

Geotech Airborne Limited, July 2008, Survey and logistics report on a helicopter borne versatile time domain electromagnetic survey, *rapport interne*.

Geotech Airborne Limited, June 2009, Survey and logistics report on a helicopter borne versatile time domain electromagnetic survey, *rapport interne*.

Geotech Airborne Limited and Airborne Petroleum Geophysics, April 2008, Survey and logistics report gravity and magnetic survey, *rapport interne*.

Gilbert, W., 1600, De Magnete, Magneticisque Corporibus et de Magno Magnete Tellure.

Gillet, G., 2003, Séparation magnétique : Théorie et modélisation, *Techniques de l'Ingénieur*, **J3220**.

Green, A. A., 1983, A comparison of adjustment procedures for leveling aeromagnetic survey data, *Geophysics*, **48**, 745-753.

Greenhalgh, S., Mason, I. M., Zhou, B., 2005, An analytical treatment of single station triaxial seismic direction finding, *Journal of Geophysics and Engineering*, **2**, 8-15.

Gunn, P. J., 1975, Linear transformations of gravity and magnetic fields, *Geophys. Prospecting*, **23**, 300-312.

Hardwick, C. D., 1984, Non-oriented cesium sensors for airborne magnetometry and gradiometry, *Geophysics*, **49**, 2024-2031.

Haubensack, C., 1981, Environnement des grès Protérozoïques et des indices uranifères du secteur Kiene dans le Bassin de Franceville (République gabonaise) : Aspects sédimentologiques et géochimiques, *Thèse d'état de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg*.

Henderson, R. G., Zietz, I., 1948, Analysis of total magnetic-intensity anomalies produced by point and line sources, *Geophysics*, **13**, 428-436.

Hertz, H., 1889, Die Kräfte electrischer Schwingungen, behandelt nach der Maxwell'schen Theorie, *Annalen der Physik und Chemie*, Leipzig, **36**, 1-22.

Hildenbrand, T. G., 1983, FFTFIL: A filtering program based on two dimensional Fourier analysis, *U.S. Geol. Survey*, Open-File Report **83**, 237- 268.

Hoggatt, V. E. Jr., Bicknell, M., 1977, Numerator polynomial coefficient arrays for Catalan and related sequence convolution triangles, *The Fibonacci Quarterly*, **15**, 30-34.

Hoori, K., Hidaka, H., Gauthier-Lafaye, F., 2005, U-Pb geochronology and geochemistry of zircon from the Franceville series at Bidoudouma, Gabon, The 15th Annual Goldschmidt Conference, Moscow, Idaho, USA, *Geochim. Cosmochim. Acta*, **69**, 10S, A11.

Hsu, H. P., 1970, Fourier analysis, *Simon and Schuster*, New York.

Hsu, S. K., Sibuet, J. C., Shyu, C. T., 1996, High-resolution detection of geologic boundaries from potential anomalies: An enhanced analytic signal technique, *Geophysics*, **61**, 373-386.

Hsu, S. K., Coppens, D., Shyu, C. T., 1998, Depth to magnetic source using the generalized analytic signal, *Geophysics*, **63**, 1947-1957.

INTREPID, 2011, Intrepid Software, User Manual, Levelling and micro-levelling.

Jackson, J. D., 2001, Electrodynamique classique, *Dunod*, Paris.

Jain, B. K., 1991, Magnetic effects of a finite, arbitrarily oriented line of dipoles, *Geophysics*, **56**, 1474-1476.

Jensen, H., 1965, Instrument details and application of a new airborne magnetometer, *Geophysics*, **30**, 875-882.

Kaufman, A. A., Hansen, R. O., Kleinberg, R. L., 2009, Principles of the Magnetic Methods in Geophysics, Volume **42**, chap.6, *Elsevier*, Oxford.

Langel, R. A., 1992, International Geomagnetic Reference Field: The sixth generation, *Journal of Geomagnetism and Geoelectricity*, **44**, 679-707.

Ledru, P., Eko N'Dong, J., Johan V., Prian, J.-P., Coste, B., Haccard, D., 1989, Structural and metamorphic evolution of the Gabon Orogenic Belt: Collision tectonics in the lower proterozoic ? *Precambrian Research*, **44**, 227-241.

Lima, E. A., Weiss, B.P., 2009, Obtaining vector magnetic field maps from single-component measurements of geological samples, *J. Geophys. Res.*, **114**, 1-21.

Lliboutry, L., 1998, Géophysique et géologie, *Masson*, Paris.

Lourenço, J. S., Morrison, H. F., 1973, Vector magnetic anomalies derived from measurements of a single component of the field, *Geophysics*, **38**, 359-368.

Luyendyk, A. P. J., 1997, Processing of airborne magnetic data, *AGSO Journal of Australian Geology and Geophysics*, **17**, 31-38.

Mathieu, R., Zetterström, L., Cuney, M., Gauthier-Lafaye, F., Hidaka H., 2001, Alteration of monazite and zircon and lead migration as geochemical tracers of fluid paleocirculations around the Oklo-Okélobondo and Bangombé natural nuclear reaction zones (Franceville basin, Gabon), *Chemical Geology*, **171**, 147-171.

Mathieu, R., 2006, Le modèle francevillien, *communication COGEMA*.

Miller, H. G., Singh, V., 1994, Potential field tilt a new concept for location of potential field sources, *Journal of applied Geophysics*, **32**, 213-217.

- Mohan, N. L., Anand Babu, L., 1995**, An Analysis of 3D Analytic Signal, *Geophysics*, **60**, 531-536.
- Mossman, D. J., Gauthier-Lafaye, F., Jackson, S. E., 2005**, Black shales, organic matter, ore genesis and hydrocarbon generation in the Paleoproterozoic Franceville Series, Gabon. *Precambrian Research*, **137**, 253-272.
- Munsch, M., Boulanger, D., Ulrich, P., Bouiflane, M., 2007**, Magnetic cartography for UXO detection and characterization: use of multi-sensor Fluxgate 3-axis magnetometers and methods of interpretation, *J. Applied Geophys.*, **61**, 168-183.
- Munsch, M., Fleury, S., 2011**, Scalar, vector, tensor magnetic anomalies: Measurement or computation? , *Geophysical Prospecting*, **59**, 1035–1045.
- Nabighian, M. N., 1972**, The analytic signal of two-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-sections; its properties and use for automated anomaly interpretation. *Geophysics*, **37**, 507-517.
- Nabighian, M. N., 1974**, Additional comments on the analytic signal of tow-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-section, *Geophysics*, **39**, 85-92.
- Nabighian, M. N., 1984**, Toward a Three-dimensional Automatic Interpretation of Potential Field Data 6ia Generalized Hilbert Transforms: Fundamental Relations, *Geophysics*, **49**, 780-786.
- Nagy, B., Gauthier-Lafaye, F., Holliger, P., Davis, D. W., Mossman, D. J., Leventhal, J. S., Rigali, M. J., Parnell, J., 1991**, Organic matter and containment of uranium and fissionogenic isotopes at the Oklo natural reactors. *Nature*, **354**, 472-475.
- Nagy, B., Gauthier-Lafaye, F., Holliger, P., Mossman, D. J., Leventhal, J. S., Rigali, M. J., 1993**, Role of organic matter in the Proterozoic Oklo natural fission reactors, Gabon, Africa. *Geology*, **21**, 655-658.
- Nelson, J. B., 1988**, Calculation of the magnetic gradient tensor from total-field gradient measurements and its application to geophysical interpretation, *Geophysics*, **53**, 957-966.

OCDE/Agence pour l'Energie Nucléaire, 1998, Uranium 1998 : Ressources, production et demande, Éditions *OCDE*.

Ofoegbu, C. O., Mohan, N. L., 1990, Interpretation of Aeromagnetic Anomalies over Part of Southeastern Nigeria Using Three-dimensional Hilbert Transform, *Pure Appl. Geoph.*, 13–29.

Oruç, B., 2010, Location and depth estimation of point-dipole and line of dipoles using analytic signals of the magnetic gradient tensor and magnitude of vector components, *Journal of Applied Geophysics*, **70**, 27-37.

Ossa Ossa, F., 2010, Etude multi-approches du bassin sédimentaire paléoproterozoïque (2.1-2.4 Ga) de Franceville au Gabon : Les environnements sédimentaires et l'impact des paléocirculations de fluides, *Thèse de doctorat de l'Université de Poitiers*, 281 p.

Pambo, F., 2004, Sédimentologie, géochimie et mineralogy d'une formation manganésifère paléoproterozoïque et des minerais associés. Exemple du gisement de Moanda au Sud-Est du Gabon, *Thèse de doctorat de l'Université de Bourgogne*.

Pedersen, L. B., Rasmussen, T. M., 1990, The gradient tensor of potential field anomalies: Some implications on data collection and data processing of maps, *Geophysics*, **55**, 1558-1566.

Perrin, J., 2007, Compilation et Retraitements des Données de Géophysique Aéroportée du Gabon, *Rapport interne BRGM*.

Pilkington, M., Roest, W. R., 1998, Removing varying directional trends in aeromagnetic data *Geophysics*, **63**, 446-453.

Pinchard, L., 1998, Electromagnétisme classique et théorie des distributions, *Ellipses*, Paris.

Poty, B., Roux, J., 1998, Minerais d'uranium, *Techniques de l'Ingénieur*, Traité Génie nucléaire, BN 3 570, **81**, 1-9.

Purucker, M., Whaler, K., 2007, Crustal Magnetism, Chap. 6, Vol. **5**: Geomagnetism, *Elsevier*, Treatise on Geophysics, 195-237.

- Primdhal, F., 1979**, The fluxgate magnetometer, *J. Phys. E: Scientific Instruments*, **12**, 241-253.
- Primdahl, F., 2000**, Resonance magnetometers, *Ripka P* (ed.), *Magnetic Sensors and Magnetometers*, Boston, 267-304.
- Reford, M. S., Sumner, J. S., 1964**, Aeromagnetism, *Geophysics*, **29**, 482-516.
- Righi, A., 1901**, Sui campi elettromagnetici e particolarmente su quelli creati. Da cariche elettriche o da poli magnetici in movimento, *Il Nuovo Cimento*, **2**, 104-121.
- Ripka, P., 2000**, Fluxgate magnetometers, *Ripka P* (ed.), *Magnetic Sensors and Magnetometers*, Boston, 75-128.
- Roest, W. R., Verhoef, J., Pilkington, M., 1992**, Magnetic interpretation using 3-D analytic signal, *Geophysics*, **57**, 116-125.
- Roy, K. K., 2008**, Potential theory in applied geophysics, *Springer*, Berlin.
- Sabaka, T. J., Olsen, N., Langel, R. A., 2002**, A comprehensive model of the quiet-time, near-Earth magnetic field: phase 3, *Geophysical Journal International*, **151**, 32-68.
- Sailhac, P., 1999**, Analyse multiéchelle et inversion de données géophysiques en Guyane Française, *Thèse de doctorat de l'Institut de Physique du Globe de Paris*, 250 p.
- Sailhac, P., Gibert, D., 2003**, Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Two-dimensional wavelets and multipolar approximations, *Journal of Geophysical Research*, **108**, 1-22.
- Salem, A., Ravat, D., Gamey, T. J., Ushijima, K., 2002**, Analytic signal approach and its applicability in environmental magnetic investigations, *Journal of Applied Geophysics*, **49**, 231-244.
- Salem, A., Ravat, D., 2003**, A combined analytic signal and Euler method (AN-EUL) for automatic interpretation of magnetic data, *Geophysics*, **68**, 1952-1961.

Salem, A., William, S., Fairhead, D., Smith, R., Ravat, D., 2008, Interpretation of magnetic data using tilt angle derivatives, *Geophysics*, **73**, 1-10.

Salze, D., 2008, Etude des interactions entre uranium et composés organiques dans les systèmes hydrothermaux, *Thèse de doctorat de l'Université Henri Poincaré de Nancy*.

Sankaran, S., Rangarajan, R., Dhar, R. L., 2005, Delineation of hydraulic connectivity across a dolerite filon through hydrogeological, geophysical and tracer studies: a case study, *Environmental Geology*, **48**, 411-419.

Schmidt, P. W., Clark, D. A., 1998, The calculation of magnetic components and moments from TMI: A case study from the Kuckers igneous complex, Queensland, *Exploration Geophysics* **29**, 609-614.

Schmidt, P. W., Clark, D. A., 2006, The magnetic gradient tensor: Its properties and uses in source characterization, *The Leading Edge*, **25**, 75-78.

Schwartz, L., 1961, Méthodes mathématiques pour les sciences physiques, *Hermann*, Paris.

Shuey, R., T., 1972, Application of Hilbert transforms to magnetic profiles, *Geophysics*, **37**, 1043-1045.

Singh, J., Rao, M. K., 1970, Magnetic study of the dolerite filon near Amarpur, Dhanbad (Bihar), *Pure and Applied Geophysics*, **82**, 133-148.

Slack, H. A., Lynch, V. M., Langan, L., 1967, The geomagnetic gradiometer, *Geophysics*, **32**, 877-892.

Smellie, D. W., 1956, Elementary approximations in aeromagnetic interpretation, *Geophysics*, **21**, 1021-1040.

Spiegel, M. R., 1968, Mathematical Handbook of Formula and Tables, *McGraw Hill*, New York.

Stolz, R., Zakosarenko, V., Schulz, M., Chwala, A., Fritzsche, L., Meyer, H. G., Köstlin, E. O. 2006, Magnetic full-tensor SQUID gradiometer system for geophysical applications, *The Leading Edge*, **25**, 178-180.

Sykes, M. P., Das, U. C., 2000, Directional filtering for linear feature enhancement in geophysical maps, *Geophysics*, **65**, 1758–1768.

Talwani, M., Heirtzler, J. R., 1964, Computation of magnetic anomalies caused by two-dimensional structures of arbitrary shape, Computers in the Mineral Industries, Stanford University Publication, *Geological Sciences*, **9**, 464–480.

Telford, W. M., Geldart L. P., Sheriff, R. E., 1990, Applied Geophysics, *Cambridge University Press*, New York.

Verduzco, B., Fairhead, J. D., Green, C. M. , Mackenzie, C., 2004, New insights into magnetic derivatives for structural mapping, *SEG the Leading Edge*, 116-119.

Vologina, E. G., Kalugin, I. A., Osukhovskaya, Yu. N., Sturm, M., Ignatova, N. V., Radziminovich, Ya. B., Dar'in, A. V., Kuz'min, M. I., 2010, Sedimentation in Proval Bay (Lake Baikal) after earthquake-induced subsidence of part of the Selenga River delta, *Russian Geology and Geophysics*, **51**, 1275-1284.

Weber, F., 1968, Une série précambrienne du Gabon: le Francevillien, sédimentologie, géochimie, relations avec les gîtes minéraux. *Mémoire du Service de Cartographie Géologique d'Alsace*, **28**.

Weber, F., 1969, Une série précambrienne du Gabon: le Francevillien, sédimentologie, géochimie, relations avec les gîtes minéraux, *Thèse d'état de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg*, 340 p.

Weber, F., Bonhomme, M., 1975, Données radiochronologiques nouvelles sur le Francevillien et son environnement, *Le phénomène Oklo, IAEA (Vienne)*, **204/16**, 17-33.

Zimmerman, J. E., Campbell, W. H., 1975, Tests of cryogenic SQUID fir geomagnetic field measurements, *Geophysics*, **40**, 268-284.

PRÉSENTATION ORALE DE

SOUTENANCE DE THÈSE



Méthode magnétique appliquée à l'exploration multi-échelle du Bassin de Franceville

Soutenance de Thèse

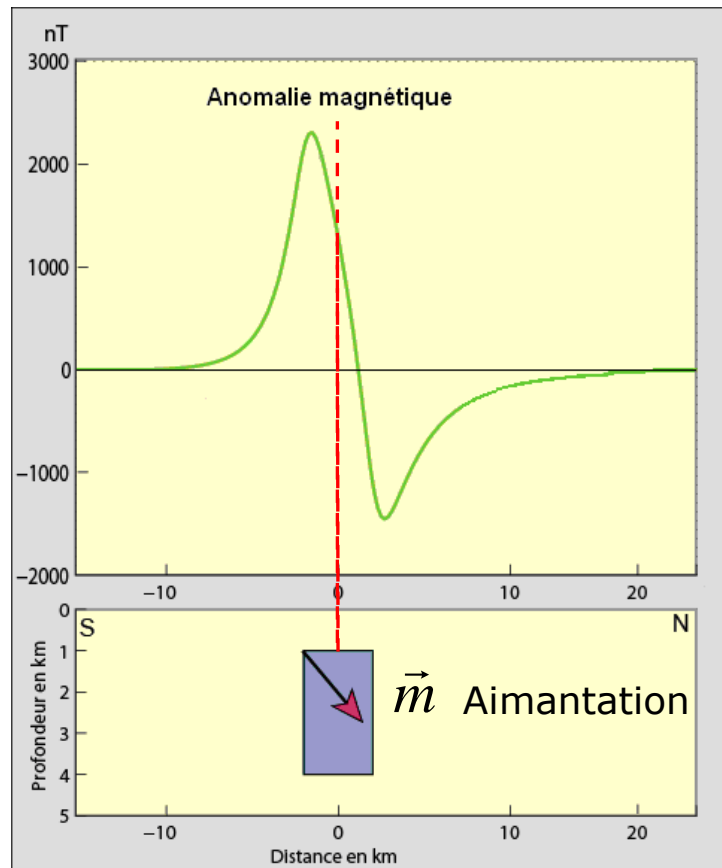
Mardi 27 septembre 2011

Simon FLEURY

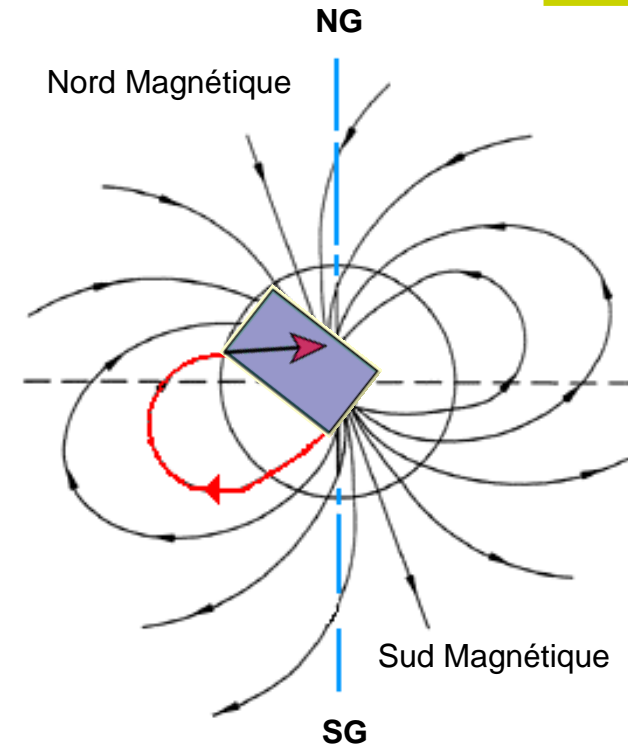
Directeur de thèse : Marc Munschy



Problématique



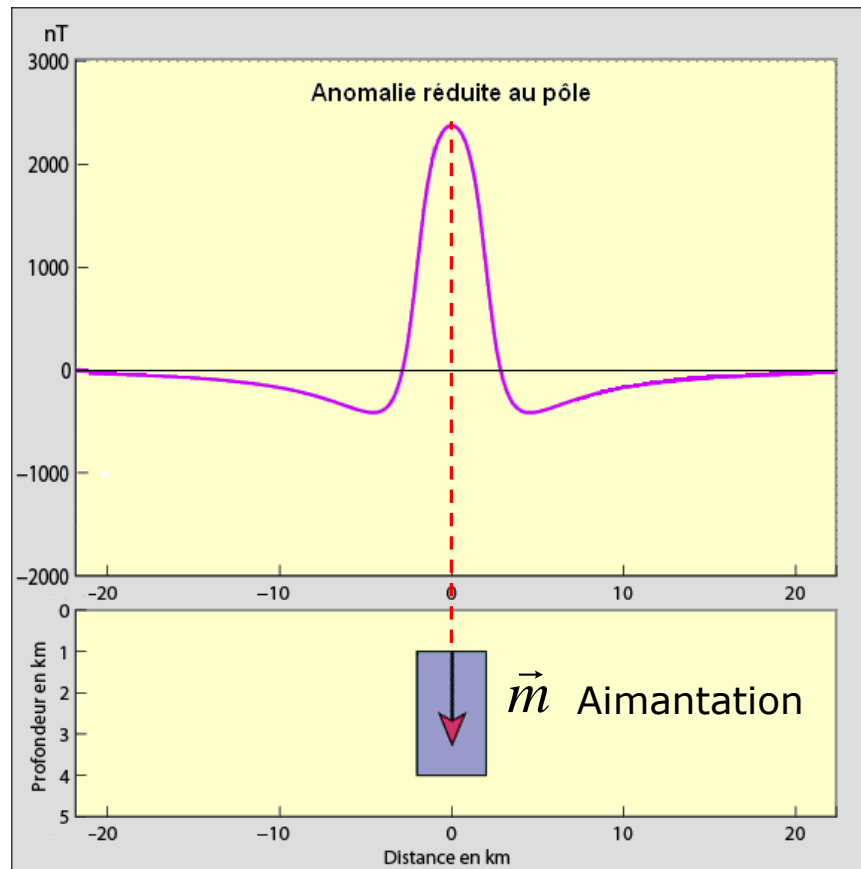
(Modifiée d'après Edel, Cours Méthodes Potentielles)



Lignes du champ de référence \vec{R}
(aimantation induite par le champ)

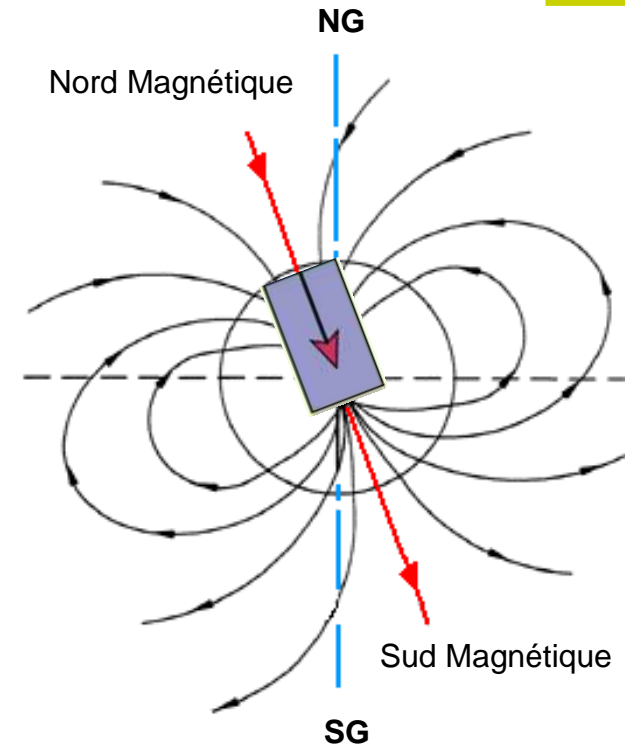
- ◆ Localisation quelconque :
anomalie dissymétrique

Problématique



(Modifiée d'après Edel, Cours Méthodes Potentielles)

- ◆ **Objet situé aux pôles :**
anomalie symétrique centrée sur l'objet



Lignes du champ de référence \vec{R}
(aimantation induite par le champ)

- ◆ **Méthode doublement vectorielle :**

$$\vec{m} \text{ et } \vec{R}$$

$$\vec{\mu} = (l, m, n) \text{ et } \vec{\rho} = (L, M, N)$$



► **Comment détecter des cibles uranifères à partir de données magnétiques ?**

⇒ Éléments de gîtologie, adapter outils de traitement

► **Qu'est ce qu'une anomalie magnétique ?**

⇒ Diversité des définitions, sous entend des approximations

► **Quelles sont les fonctions magnétiques caractéristiques des sources ?**

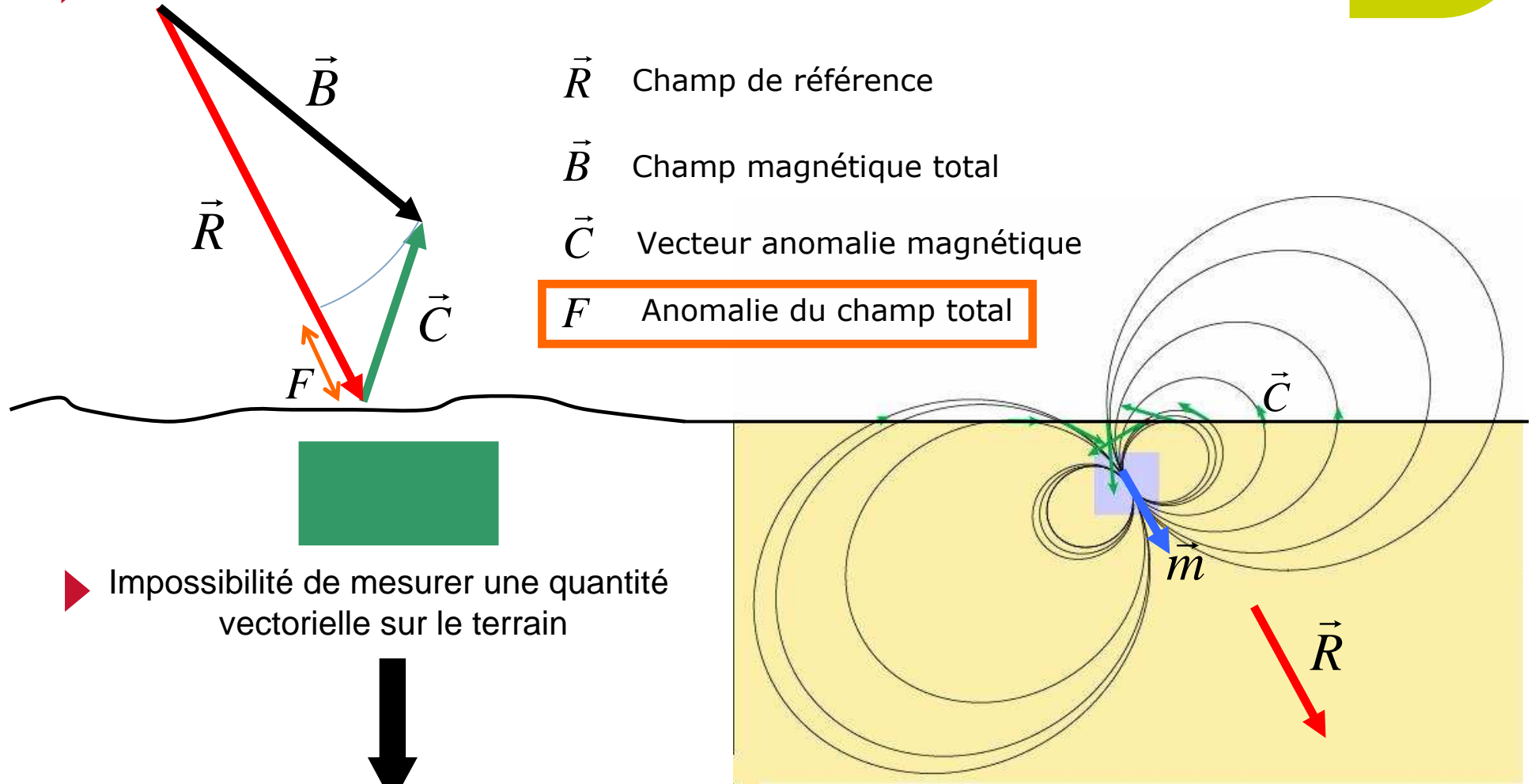
⇒ Magnétostatique/Méthodes potentielles, modélisation/inversion



- ▶ **1- Les fonctions magnétiques caractéristiques**
- ▶ **2- Superpotentiels et Tenseur de l'Anomalie Magnétique : Applications**
- ▶ **3- Prospection aéromagnétique du Bassin de Franceville**
- ▶ **4- Conclusions et perspectives**

1.1.1 Champ d'anomalie magnétique et Anomalie du champ total

► Définition du champ d'anomalie magnétique : $\vec{C} = \vec{B} - \vec{R}$



► Impossibilité de mesurer une quantité vectorielle sur le terrain



Mesure de l'anomalie scalaire : $F = B - R$

(Modifiée d'après Edel, Cours Méthodes Potentielles)

1.1.2 Anomalie de projection : F_1

$$F \neq C \quad F = \|\vec{R} + \vec{C}\| - \|\vec{R}\|$$

► Développement limité de F : $C \ll R \quad \alpha = (\vec{C}, \vec{R})$

$$F = \underbrace{C \cos \alpha}_{F_1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right) \frac{C^2}{R} + \left(-\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos^3 \alpha \right) \frac{C^3}{R^2} + O\left(\frac{C^4}{R^3}\right)$$

(Sailhac, 1999)

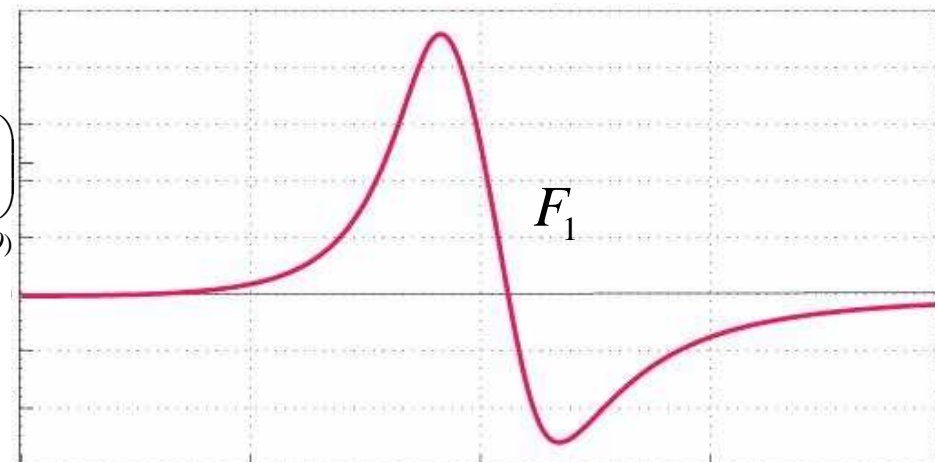
$$F_1 = \vec{\rho} \cdot \vec{C}$$

Classiquement : $F \approx F_1$ *(Blakely, 1995)*

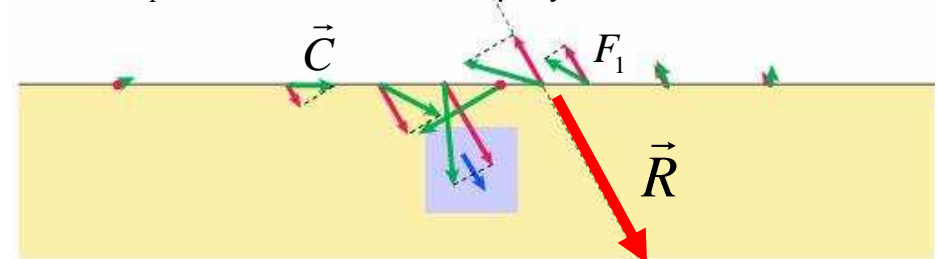
► Mais : $F \neq F_1$

Dans quelle mesure F est-il un bon estimateur de F_1 ?

Passage par F_1 essentiel pour les méthodes potentielles.



F_1 : définie comme la projection de \vec{C} sur \vec{R}



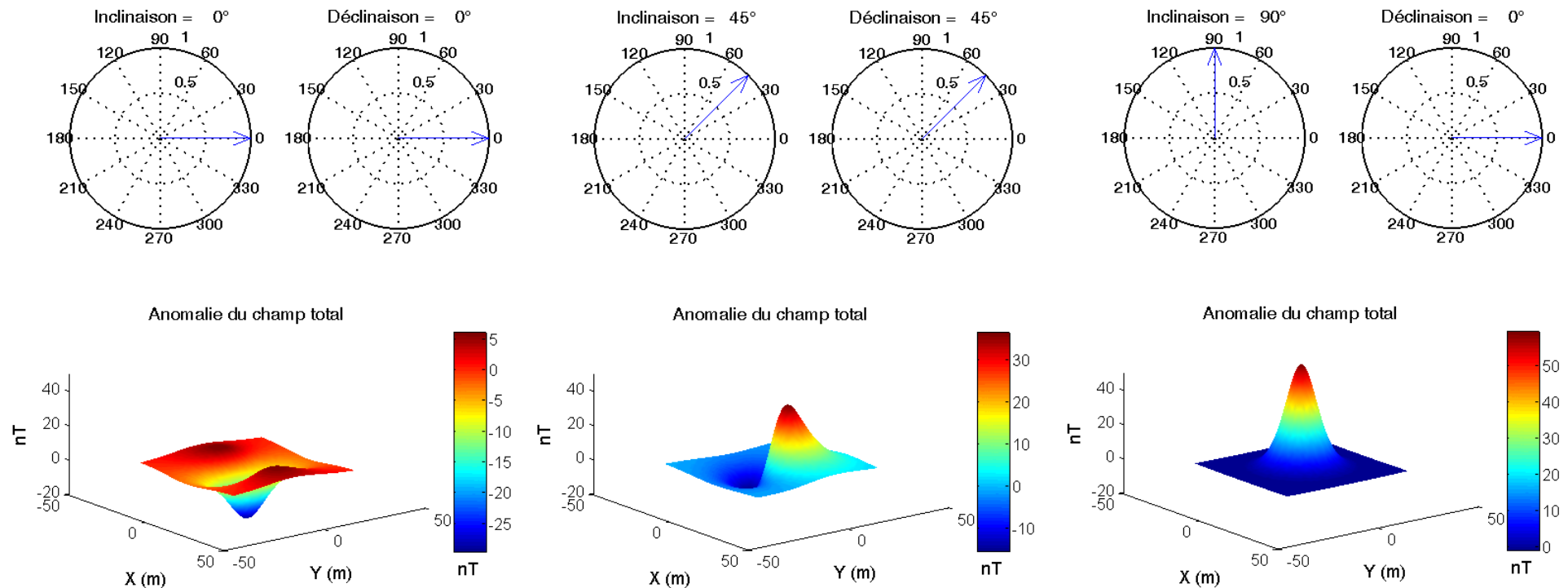
(Modifiée d'après Edel, Cours Méthodes Potentielles)

$$F_3 = F_1 + (C^2 - F_1^2) \frac{1}{2R} + (F_1^3 - C^2 F_1) \frac{1}{2R^2} + O\left(\frac{C^4}{R^3}\right)$$

$$\Rightarrow F_{k+1} = F_1 + \frac{1}{2R} (C^2 - F_k^2) + O\left(\frac{C^{k+1}}{R^k}\right)$$

1.1.2 Anomalie de projection : F_1

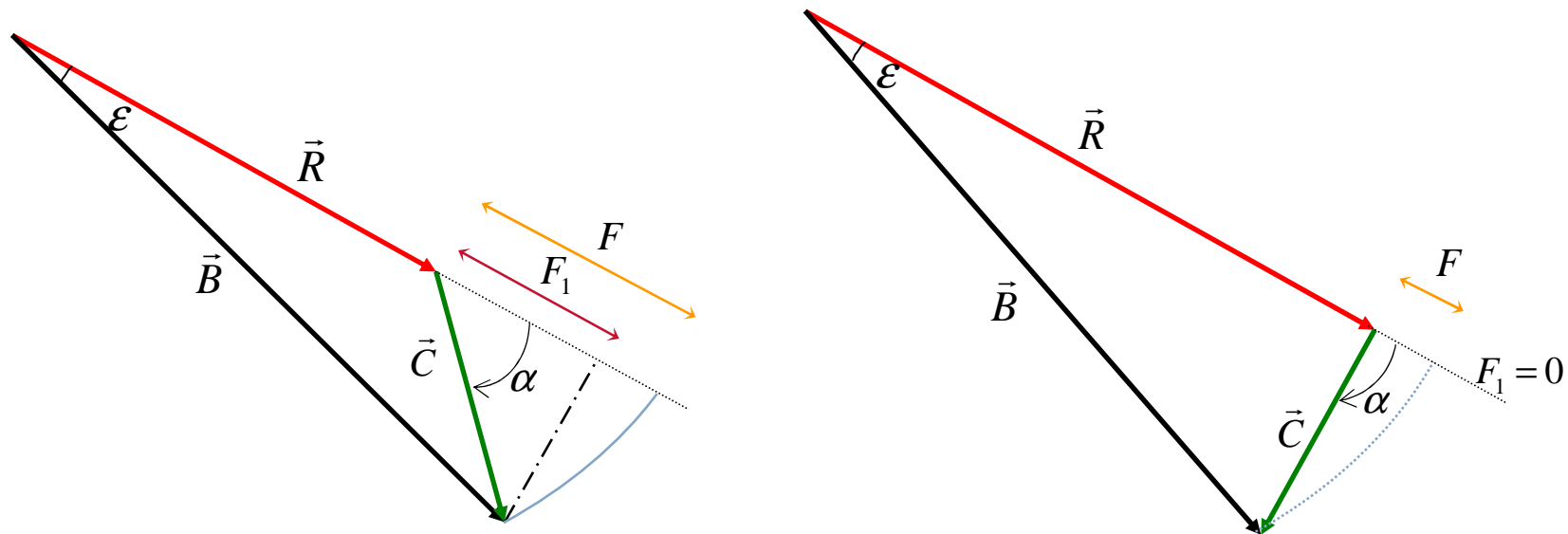
Cas du dipôle induit



Anomalies de projection pour différentes valeurs d'inclinaisons et de déclinaisons

1.2.1 Comparaison entre F et F_1

► Représentations géométriques de F et F_1 : $F_1 = \vec{\rho} \cdot \vec{C}$ et $F = B - R$



Représentations géométriques 2D de l'anomalie du champ total (F) et de l'anomalie de projection (F_1)

1.2.2 Estimation numérique de l'écart entre F et F_1

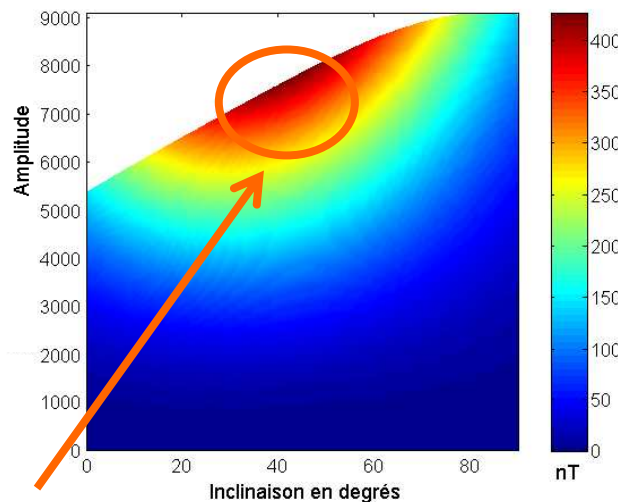
Cas du dipôle induit

$$F_{k+1} = F_1 + \frac{1}{2R} (C^2 - F_k^2) + O\left(\frac{C^{k+1}}{R^k}\right)$$

$$F_1 \leq F$$

$$F_1 = F - \frac{1}{2R} (C^2 - F^2) \quad (\text{Lourenço, 1973})$$

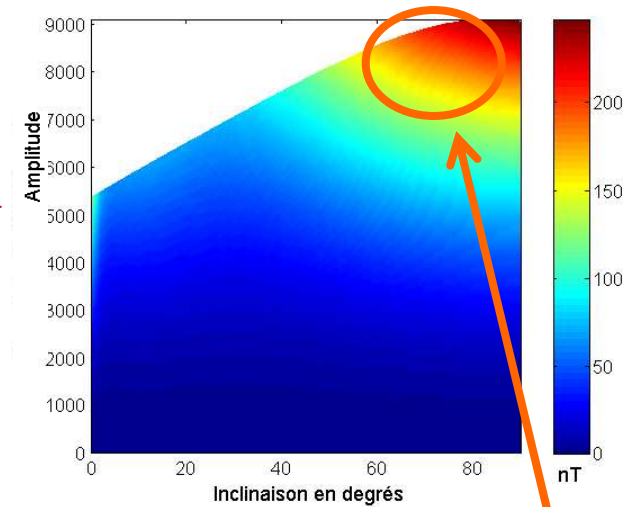
Inclinaison et amplitude de F
variables



Ecart de 5 %

Différences maximales
entre F et F_1

($D = 15^\circ$)



Différences maximales
entre F_1 estimée et
 F_1 calculée par le modèle

Ecart de 2 %

1.3.1 Les fonctions magnétiques : Potentiels et Superpotentiels

Hors des boucles de courants, les deux équations de Maxwell dans le vide s'écrivent en statique

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{0}$$



Il existe un **potentiel scalaire** U tel que

$$\vec{C} = -\vec{\nabla} U$$

Or, $F_1 = \vec{\rho} \cdot \vec{C}$



$$F_1 = -\nabla_\rho U$$

avec $\nabla_\rho = L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} + N \frac{\partial}{\partial z}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = 0$$



Il existe un **potentiel vecteur** \vec{A} tel que $\vec{C} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Or, la Jauge de Coulomb assure l'unicité de ce potentiel $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$



Il existe un **superpotentiel vecteur** $\vec{\Pi}$ tel que $\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\Pi}$
(Hertz, 1889 ; Righi, 1901)

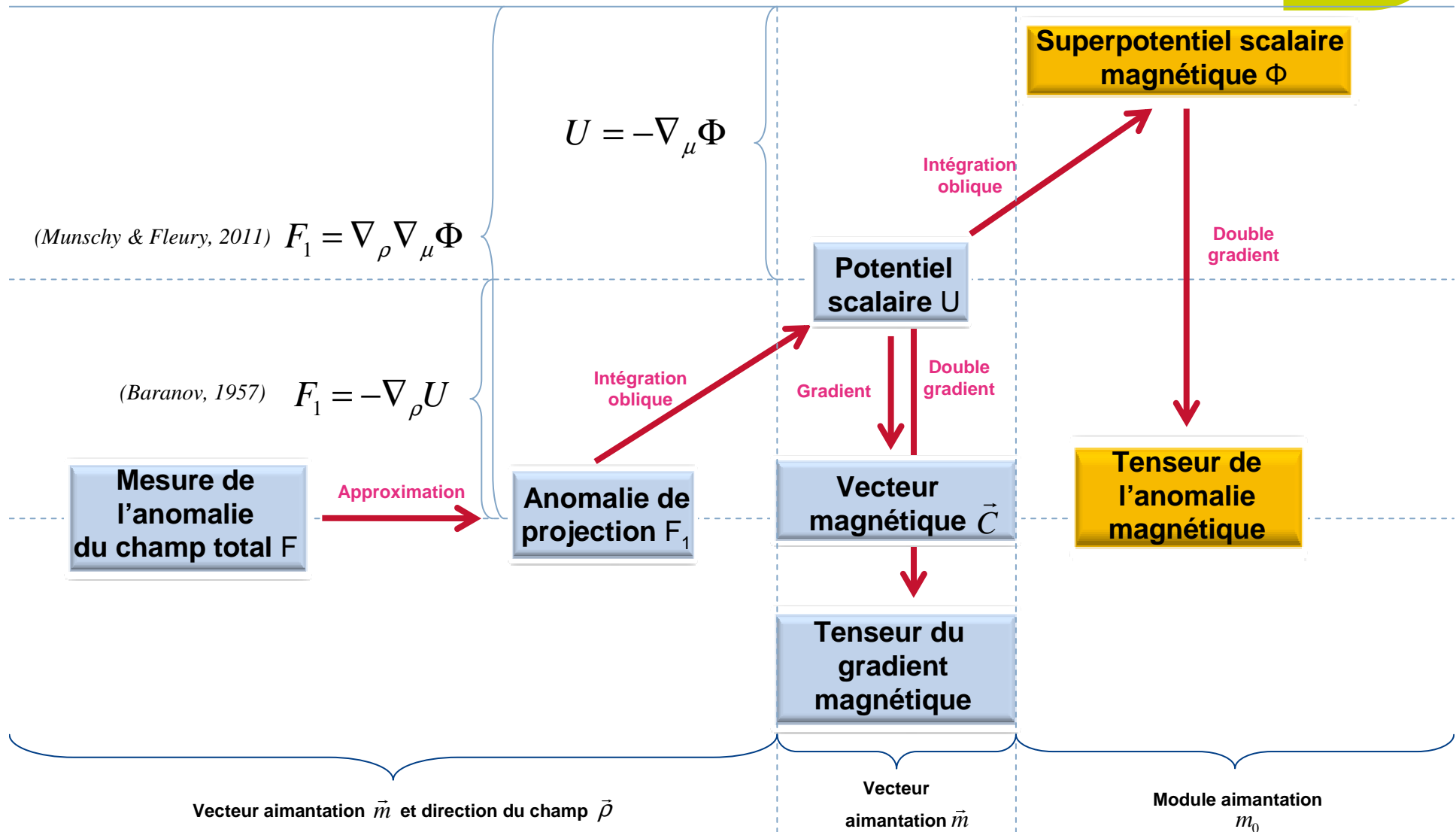
Nous définissons le **superpotentiel scalaire** $\Phi = \vec{\Pi} \cdot \vec{\mu}$



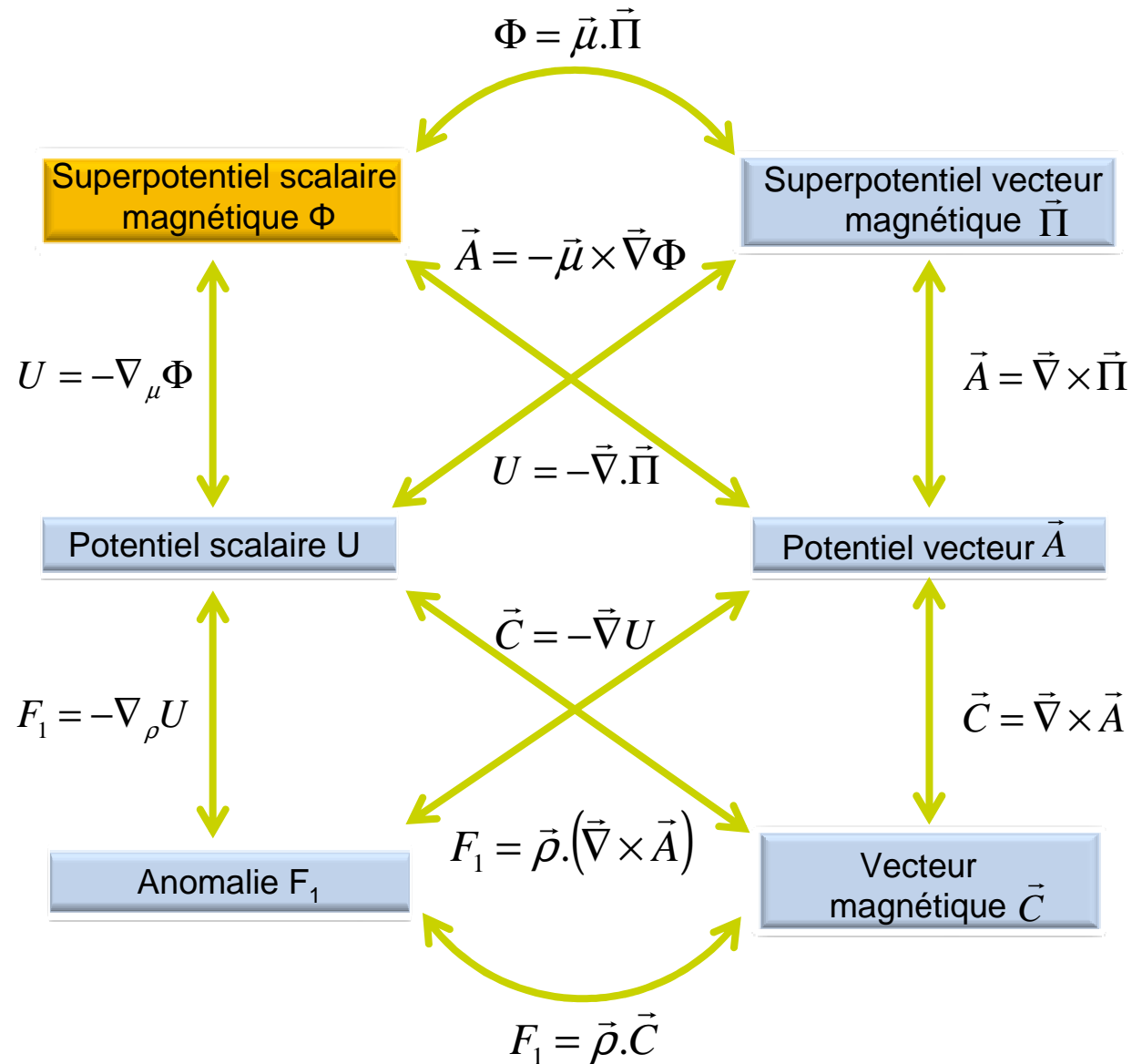
$$U = -\nabla_\mu \Phi$$

avec $\nabla_\mu = l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z}$

1.3.2 Les fonctions magnétiques dans le domaine spatial



1.3.3 Relations de passage dans le domaine spatial

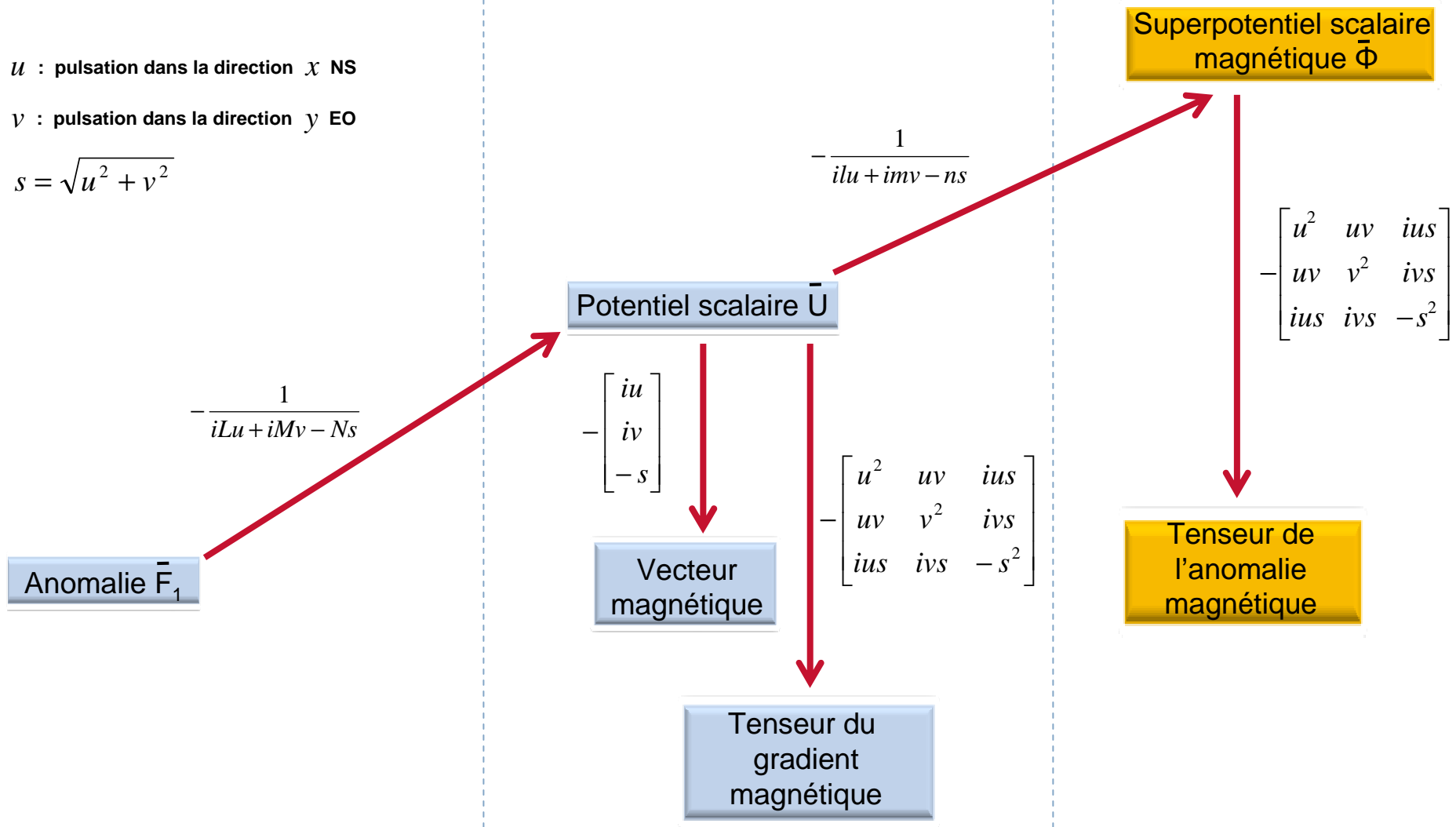


1.3.4 Les grandeurs magnétiques dans le domaine spectral

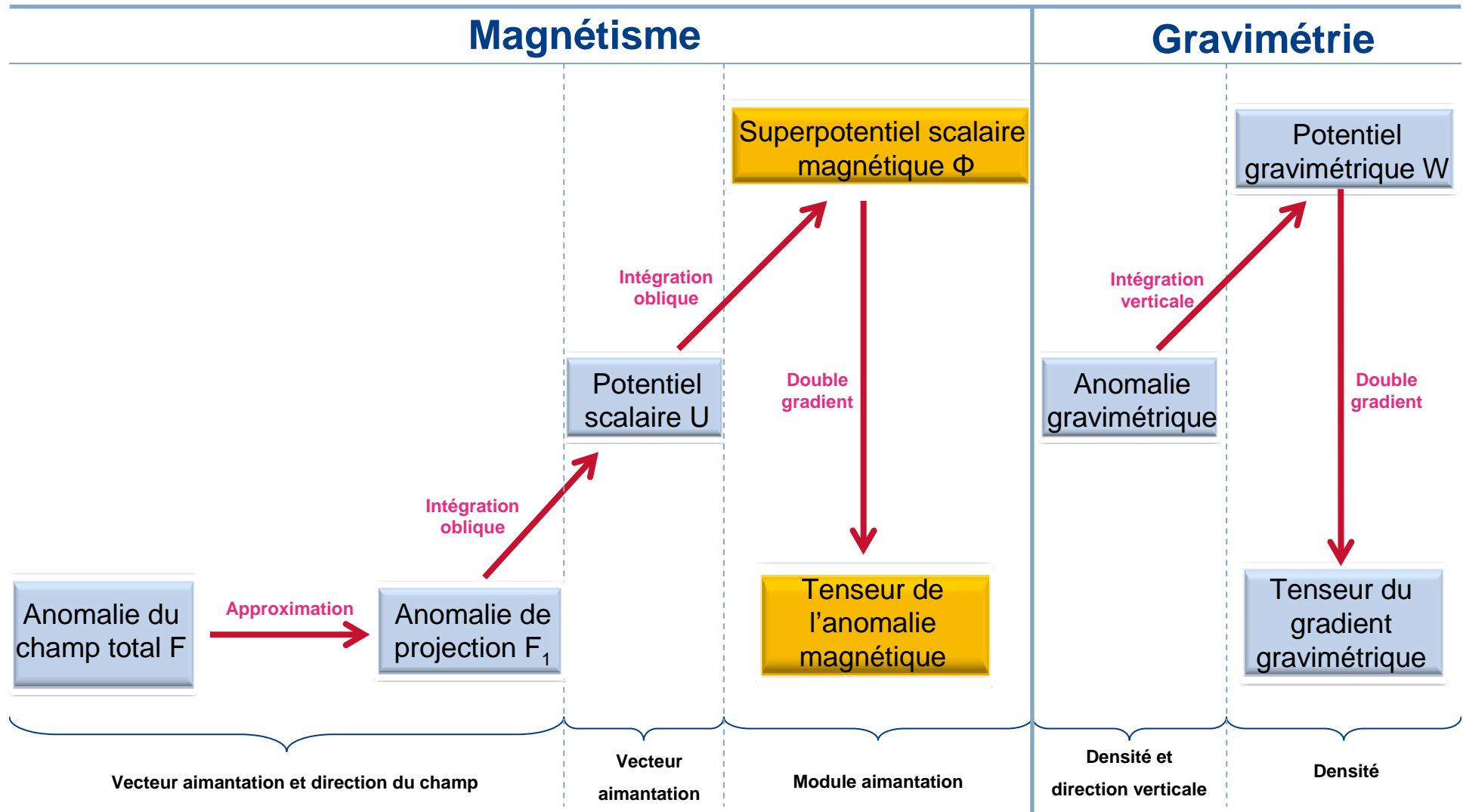
u : pulsation dans la direction x NS

v : pulsation dans la direction y EO

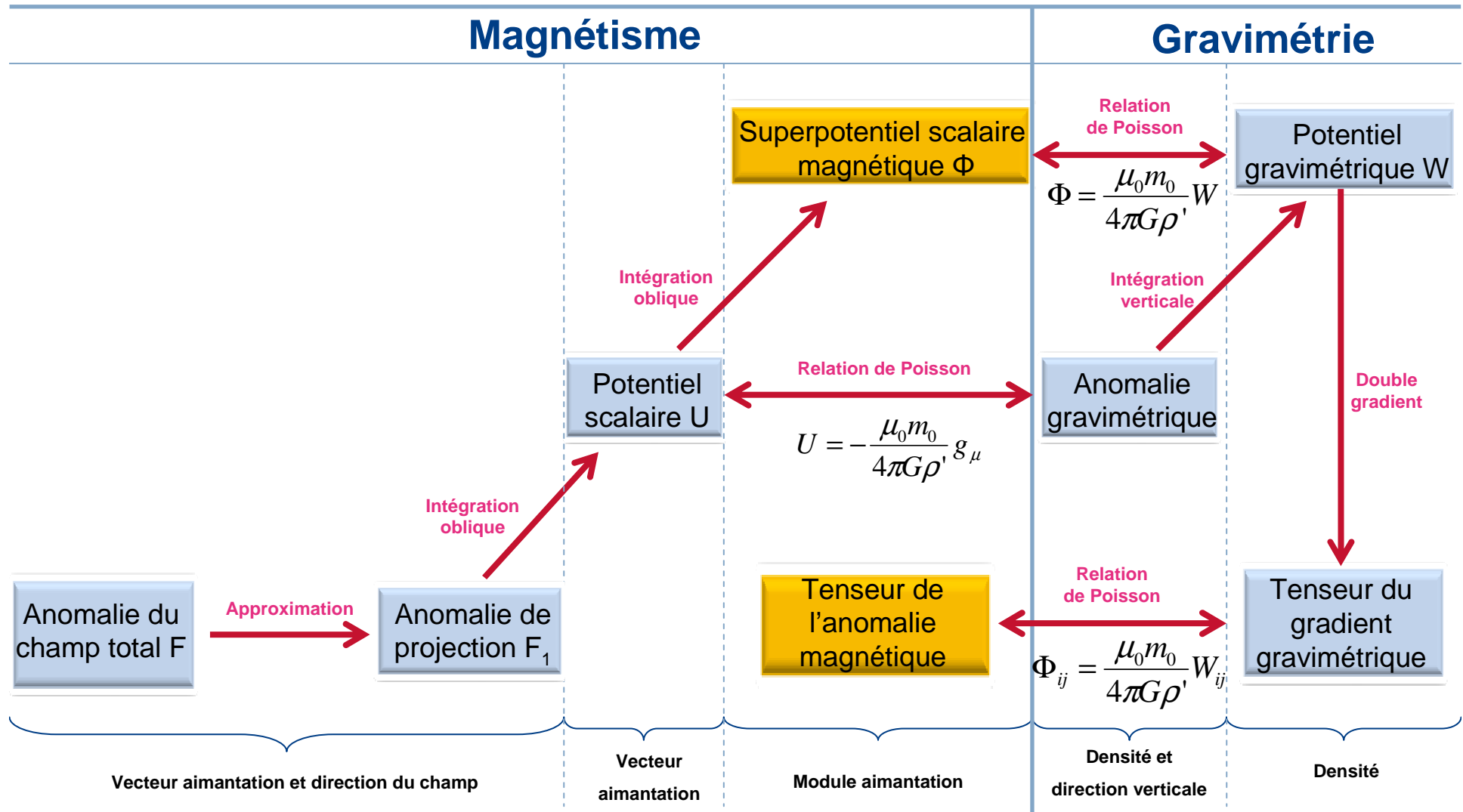
$$s = \sqrt{u^2 + v^2}$$



1.3.5 Les grandeurs en méthodes potentielles



1.3.5 Les grandeurs en méthodes potentielles



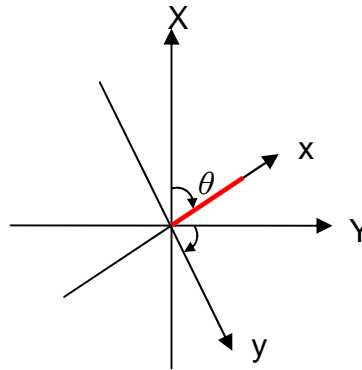


- ▶ 1- Les fonctions magnétiques caractéristiques
- ▶ **2- Superpotentiel et Tenseur de l'Anomalie Magnétique : Applications**
- ▶ 3- Prospection aéromagnétique du Bassin de Franceville
- ▶ 4- Conclusions et perspectives

2.1 Utilisation des Superpotentiels en Modélisation

Source allongée de dipôles :

$$d\vec{\Pi} = \tilde{m}_0 \frac{\vec{\mu}}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|} d\ell'$$



Spécifications :

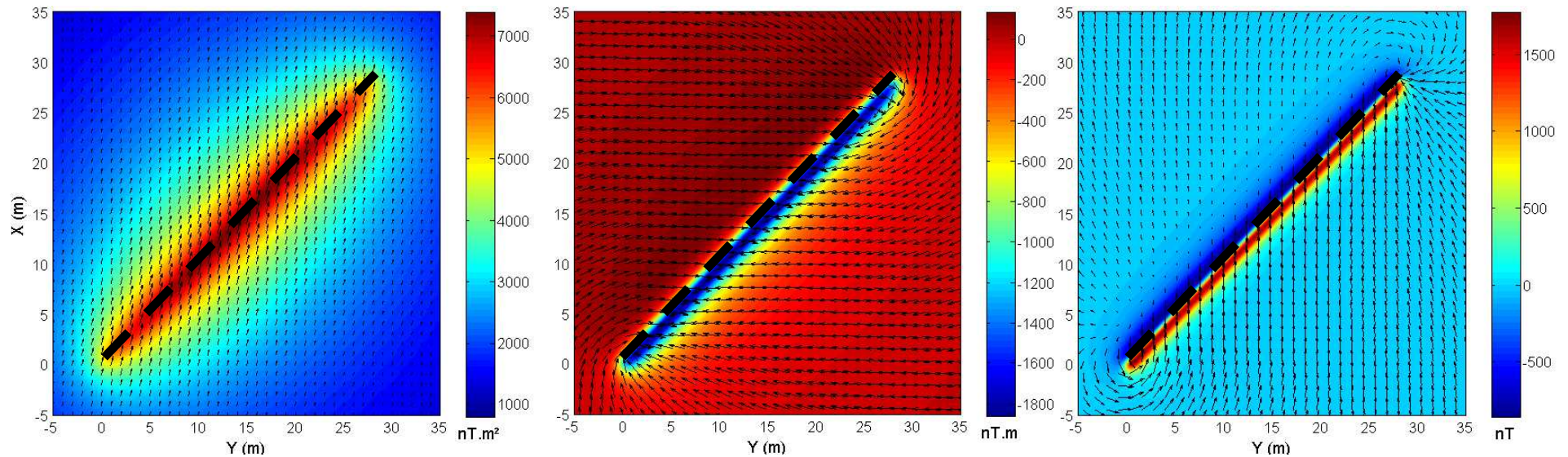
N 45° E

Z = 1 m

Aimantation induite :

Inclinaison = 60°

Déclinaison = 15°



Superpotentiel

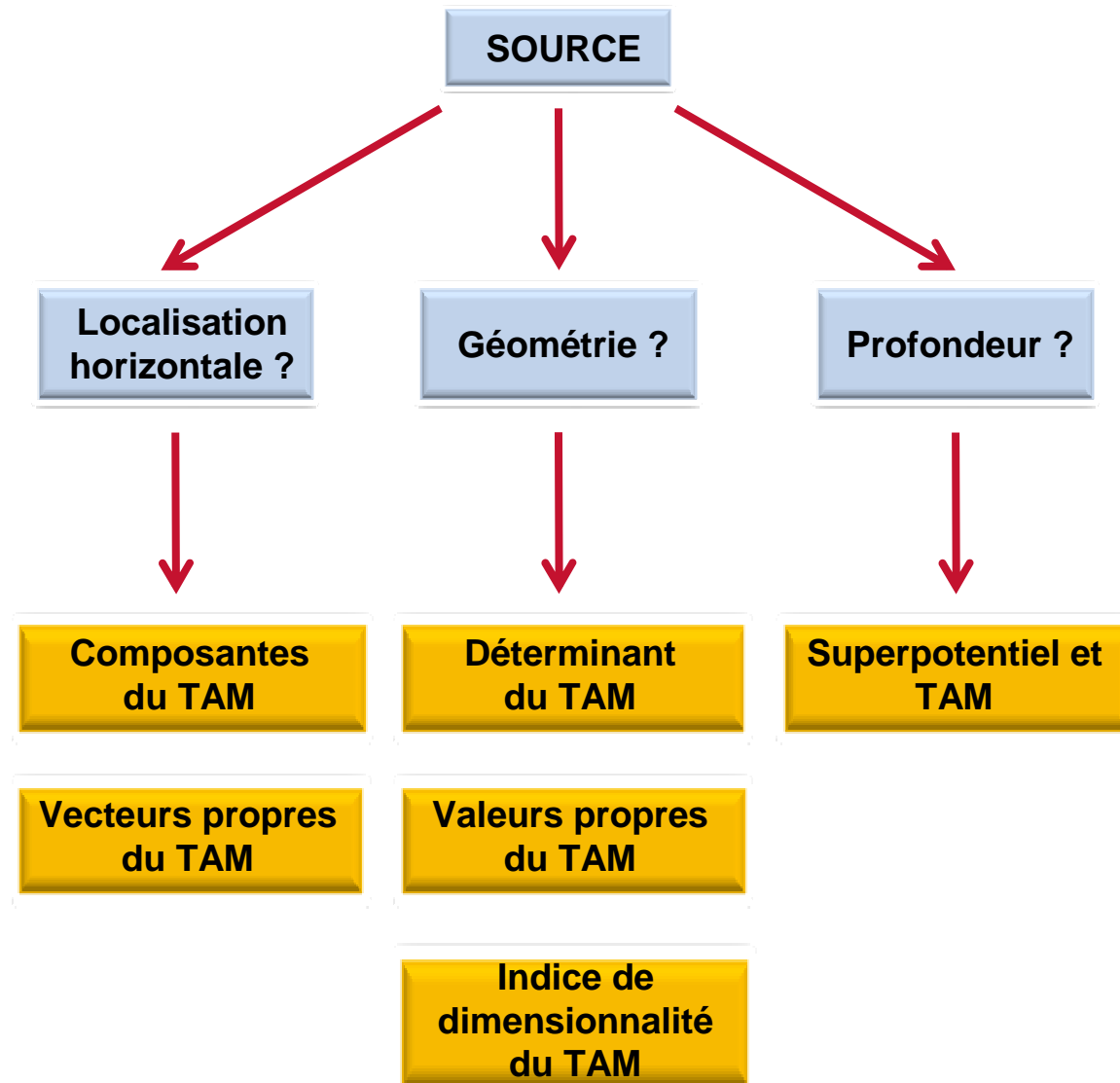
$$U = -\nabla_{\mu} \Phi$$

Potentiel

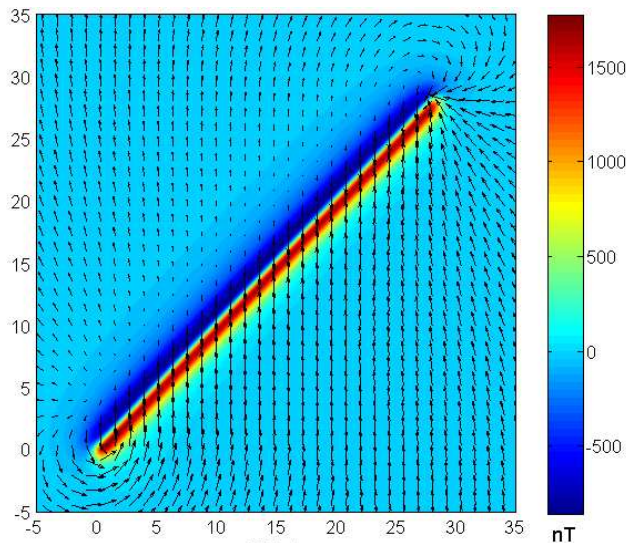
$$F_1 = -\nabla_{\rho} U$$

Anomalie F_1

2.2 Utilisation du Tenseur de l'Anomalie Magnétique (TAM) en Inversion

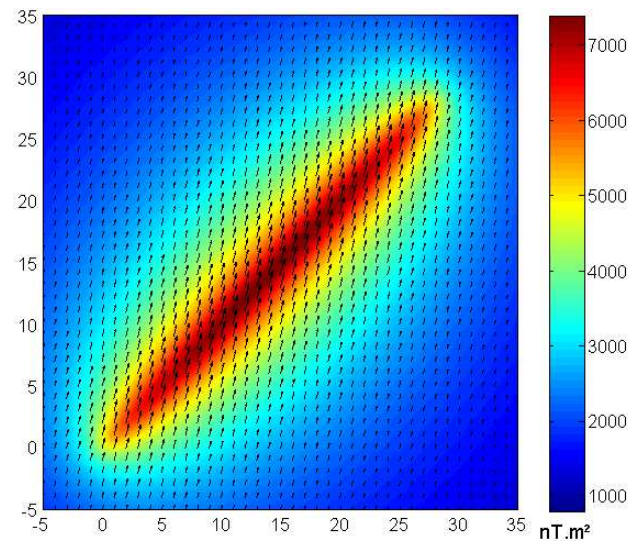


2.2.1 Localisation horizontale : Composantes du TAM



Anomalie F_1

$$\frac{1}{(ilu + imv - ns)^2}$$

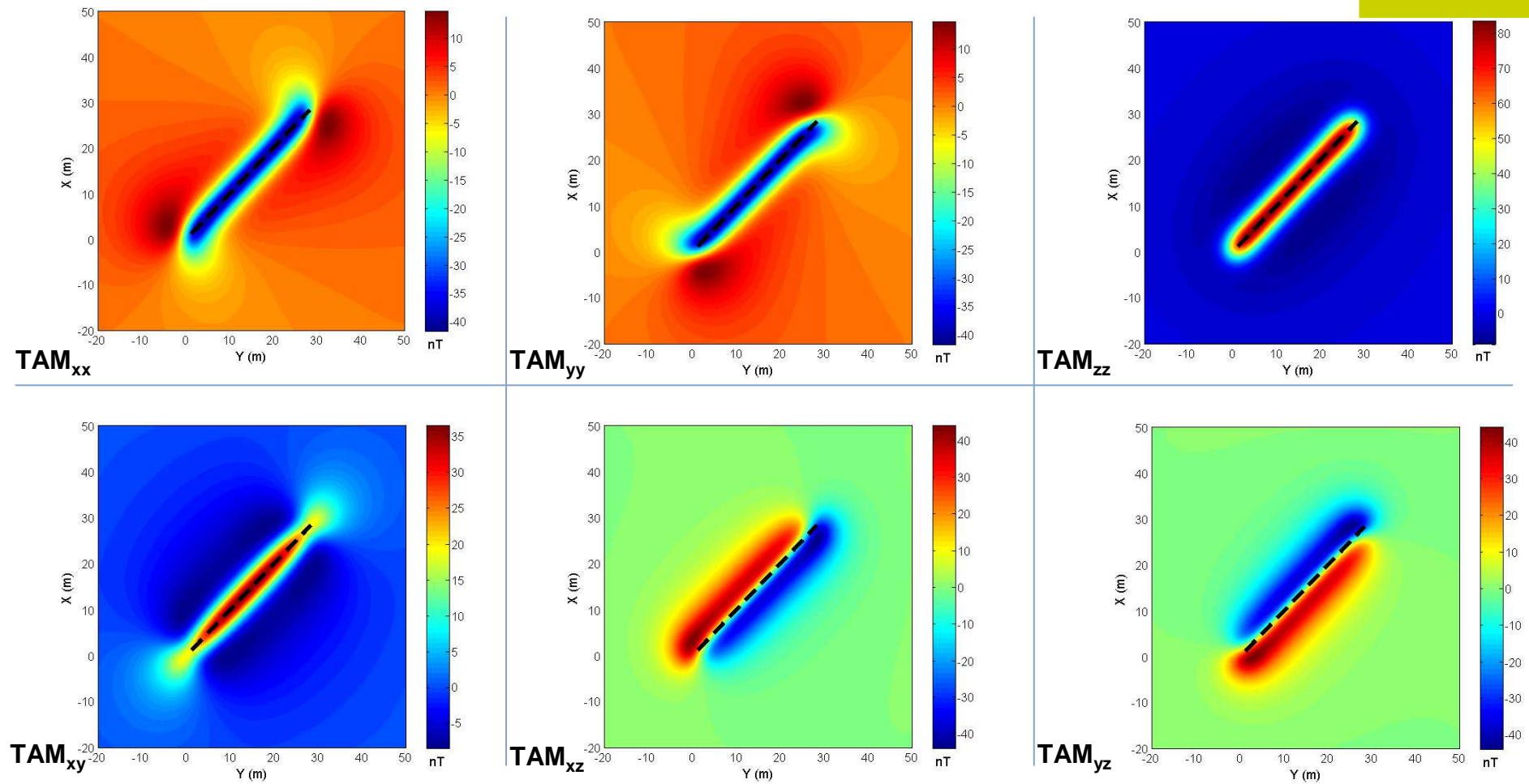


Superpotentiel scalaire
magnétique Φ

$$-\begin{bmatrix} u^2 & uv & ius \\ uv & v^2 & ivs \\ ius & ivs & -s^2 \end{bmatrix}$$

Tenseur de
l'Anomalie
Magnétique

2.2.1 Localisation horizontale : Composantes du TAM



Anomalie F_1

$$\frac{1}{(ilu + imv - ns)^2}$$

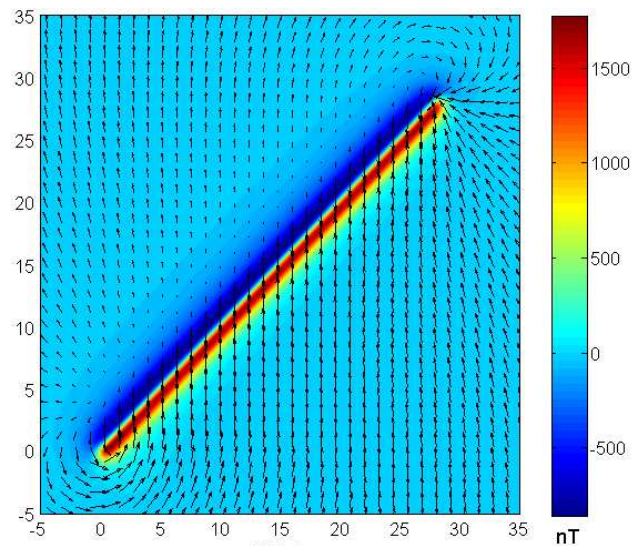
Superpotentiel scalaire
magnétique Φ

$$-\begin{bmatrix} u^2 & uv & ius \\ uv & v^2 & ivs \\ ius & ivs & -s^2 \end{bmatrix}$$

Tenseur de
l'Anomalie
Magnétique

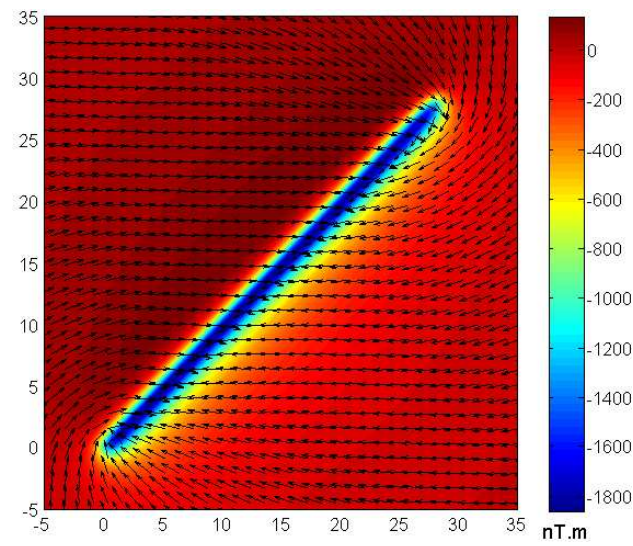
SYMÉTRIQUE

2.2.1 Composantes du Tenseur du Gradient Magnétique



Anomalie F_1

$$\frac{1}{ilu + imv - ns}$$

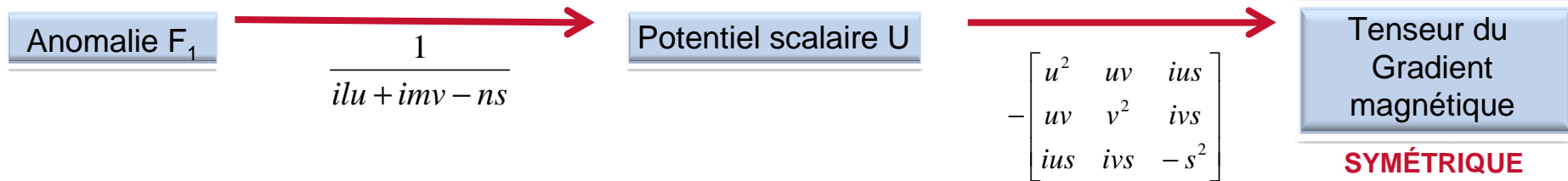
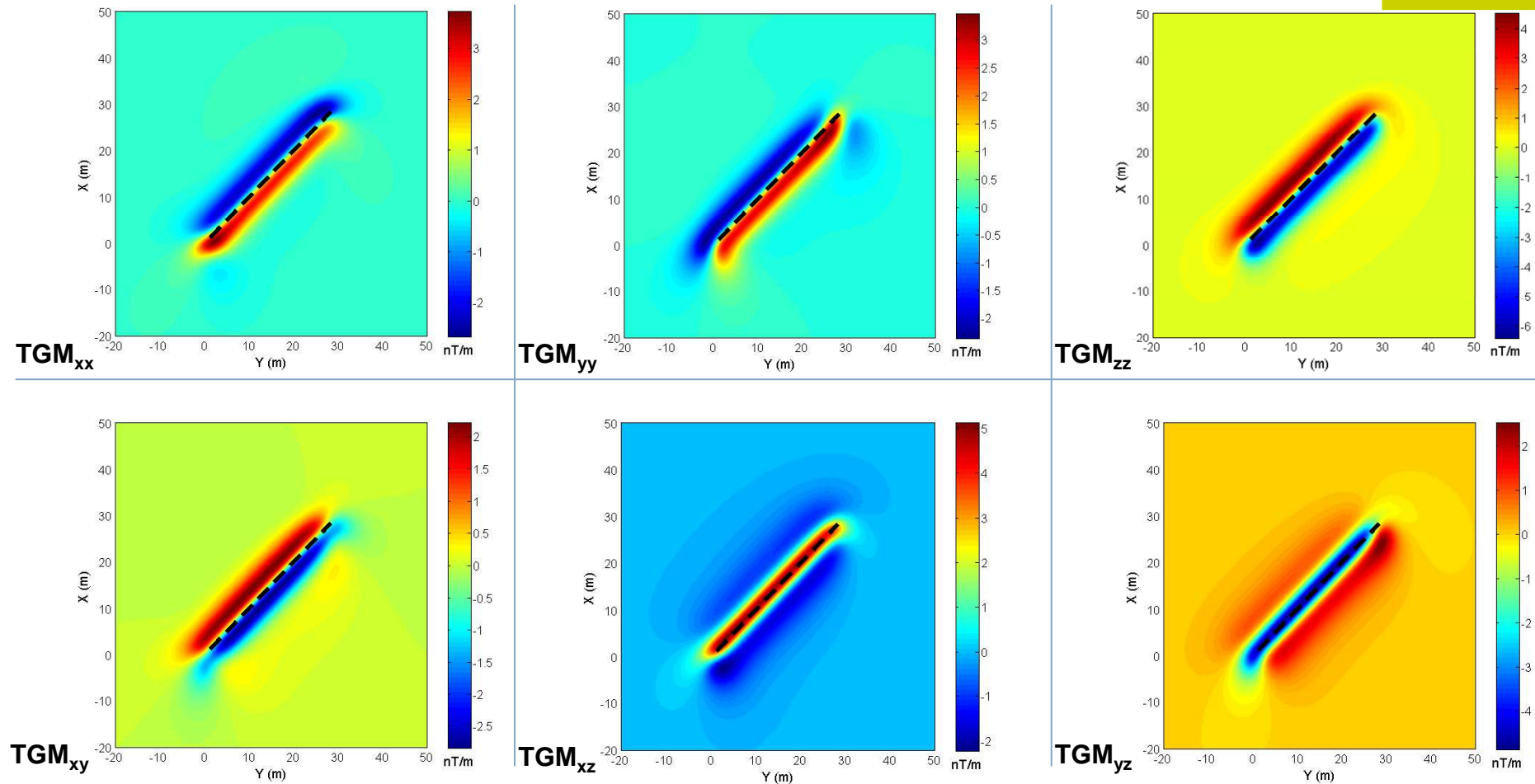


Potentiel scalaire U

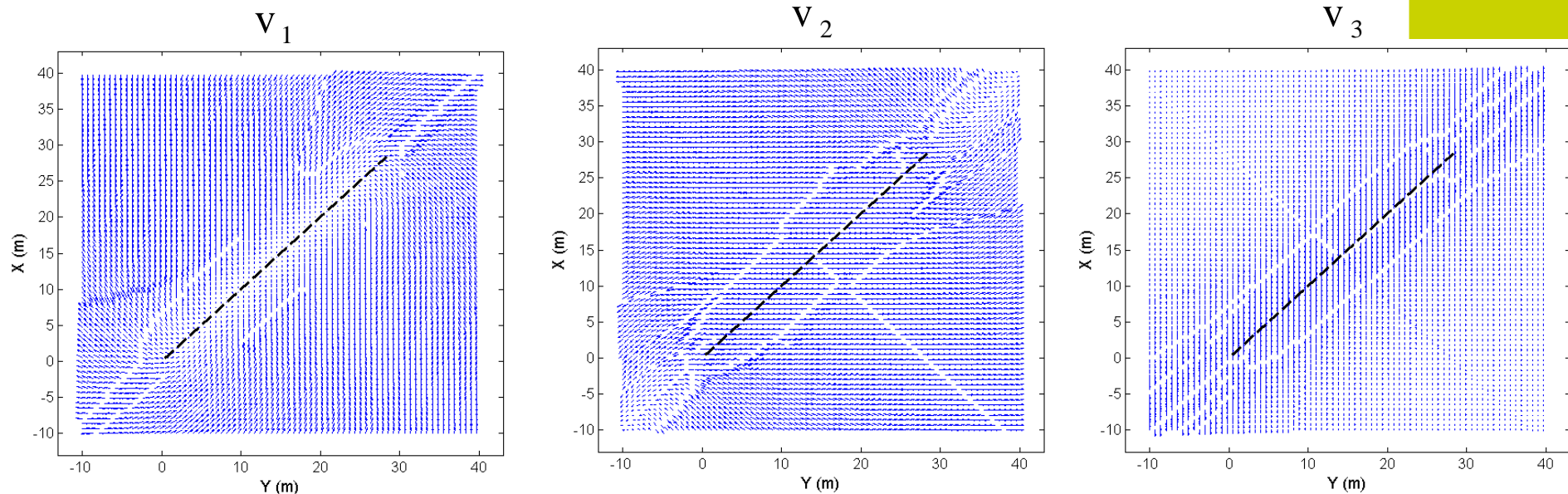
$$- \begin{bmatrix} u^2 & uv & ius \\ uv & v^2 & ivs \\ ius & ivs & -s^2 \end{bmatrix}$$

Tenseur du Gradient Magnétique

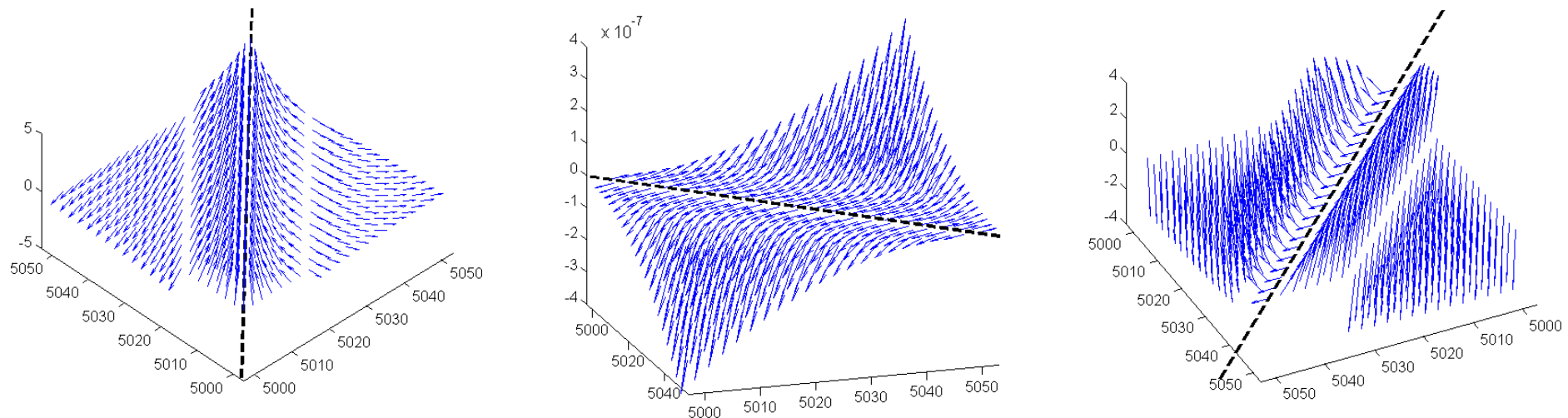
2.2.1 Composantes du Tenseur du Gradient Magnétique



2.2.1 Localisation horizontale : Vecteurs propres du TAM

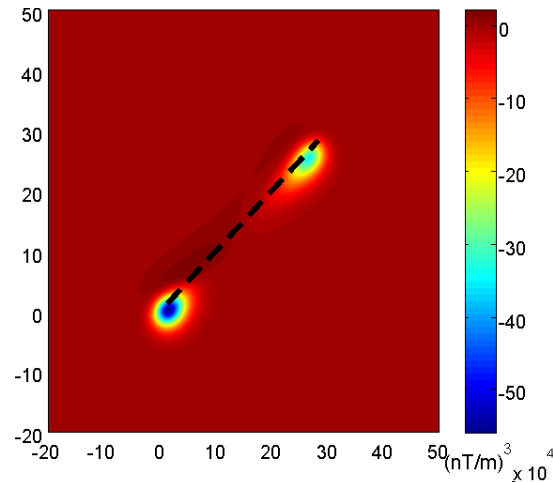


Composantes horizontales des trois vecteurs propres pour le segment horizontal



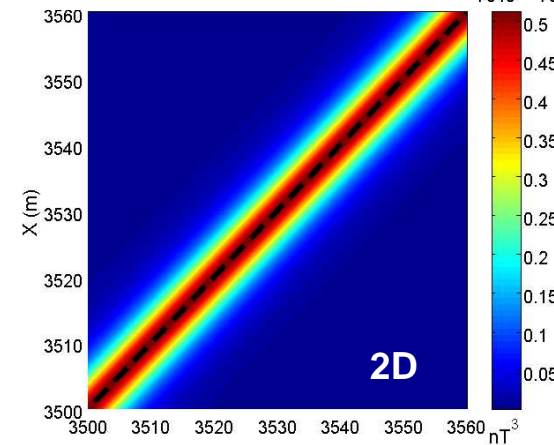
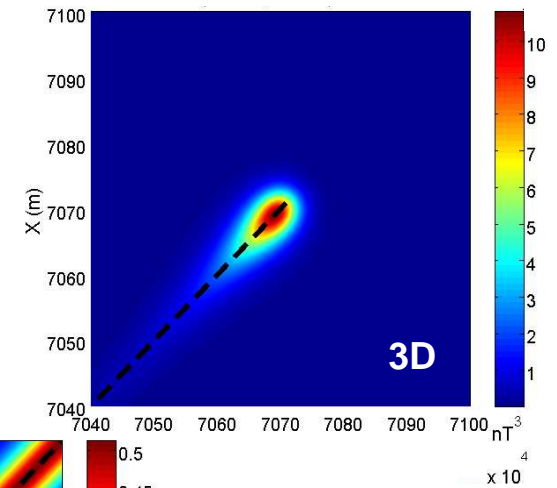
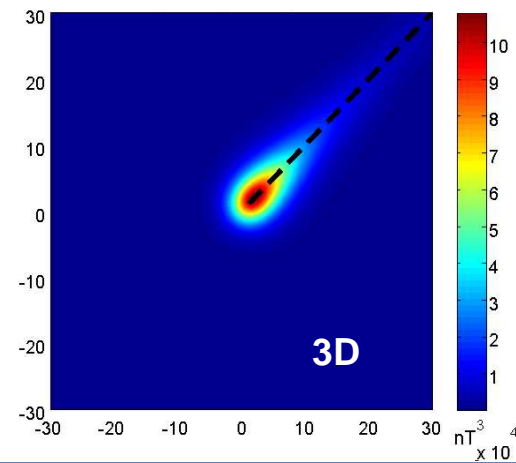
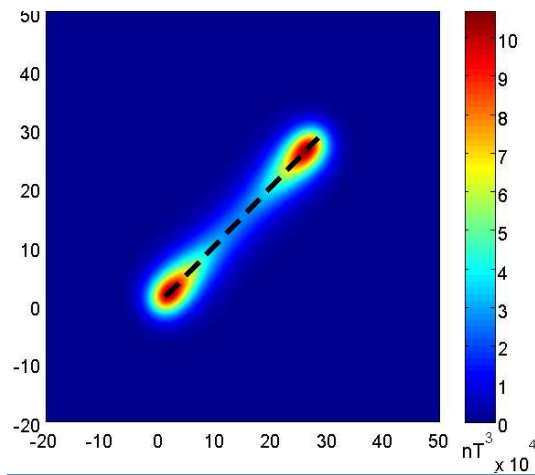
Vue 3D des trois vecteurs propres pour une ligne infinie horizontale

2.2.2 Géométrie : Déterminant du Tenseur de l'Anomalie Magnétique



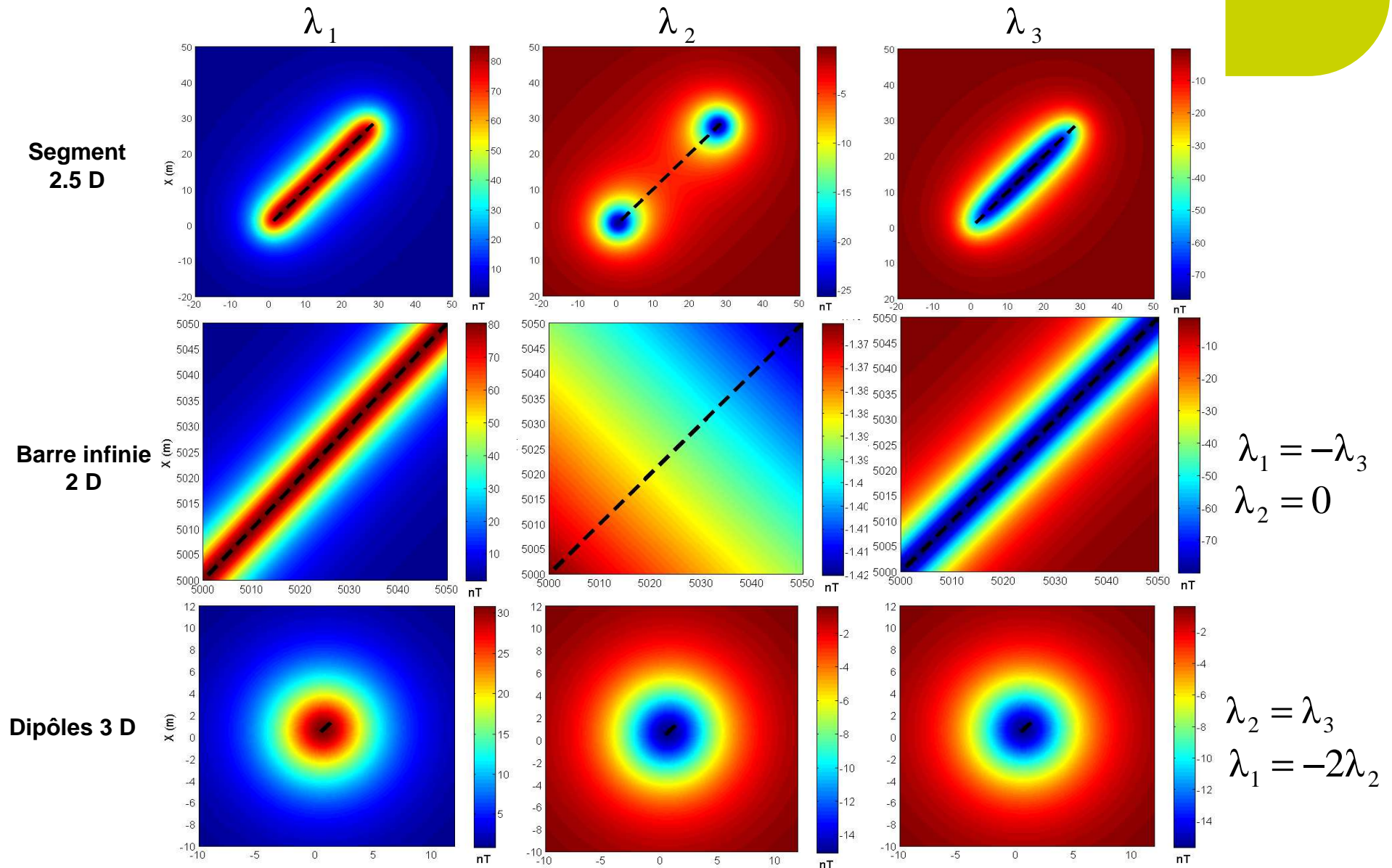
Déterminant du Tenseur du Gradient Magnétique

Déterminant du Tenseur de l'Anomalie Magnétique



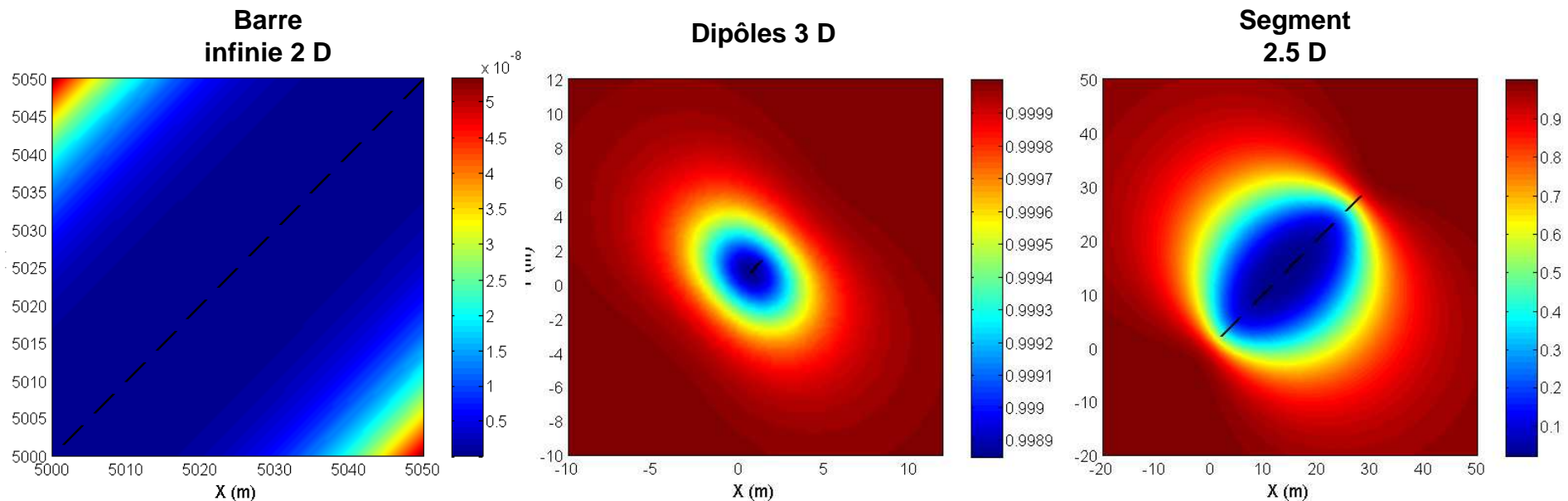
Déterminant du Tenseur de l'Anomalie Magnétique pour une ligne quasi infinie

2.2.2 Géométrie : Valeurs propres du TAM



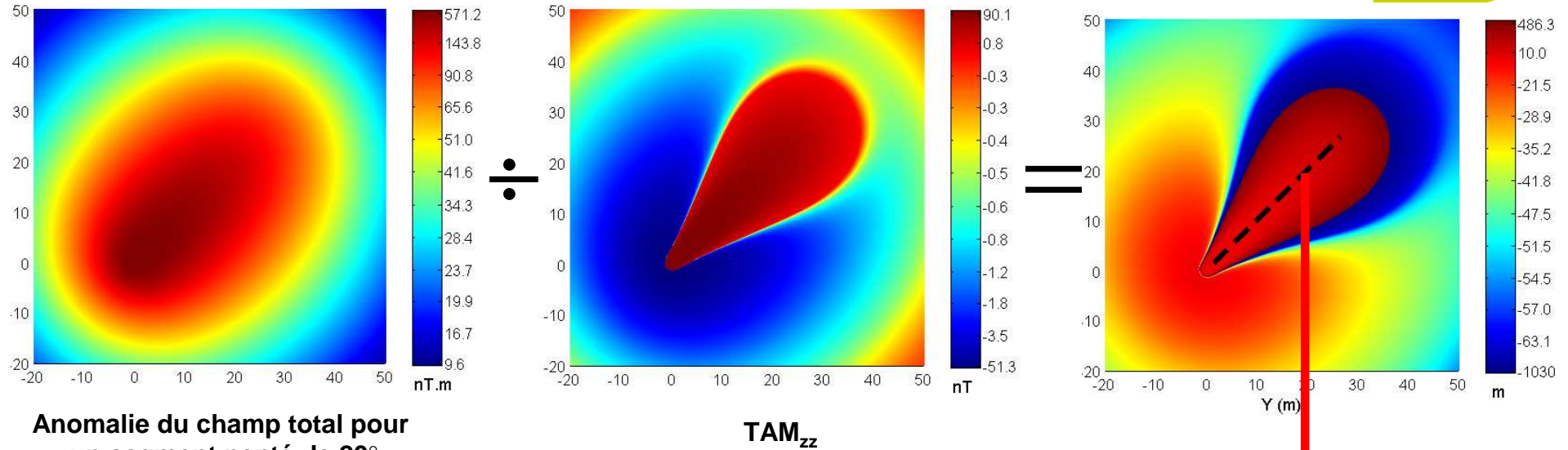
2.2.3 Géométrie : Indice de dimensionnalité du TAM

$$I_d = -\frac{27T_3^2}{4T_4^3} \quad \text{avec : } T_4 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \quad \text{et} \quad T_3 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \quad (\text{Pedersen, 1990})$$



Indice de dimensionnalité du Tenseur de l'Anomalie Magnétique

2.2.3 Profondeur : TAM et Superpotentiel

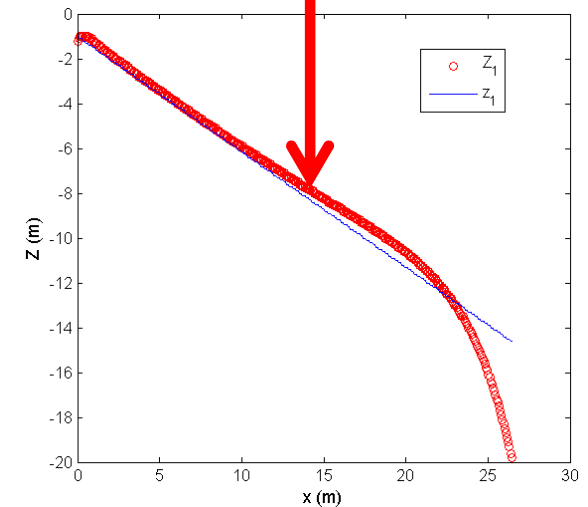


Amplitude du signal analytique du superpotentiel :

$$H_{SA}(\Phi) = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}$$

(Roest., 1992)

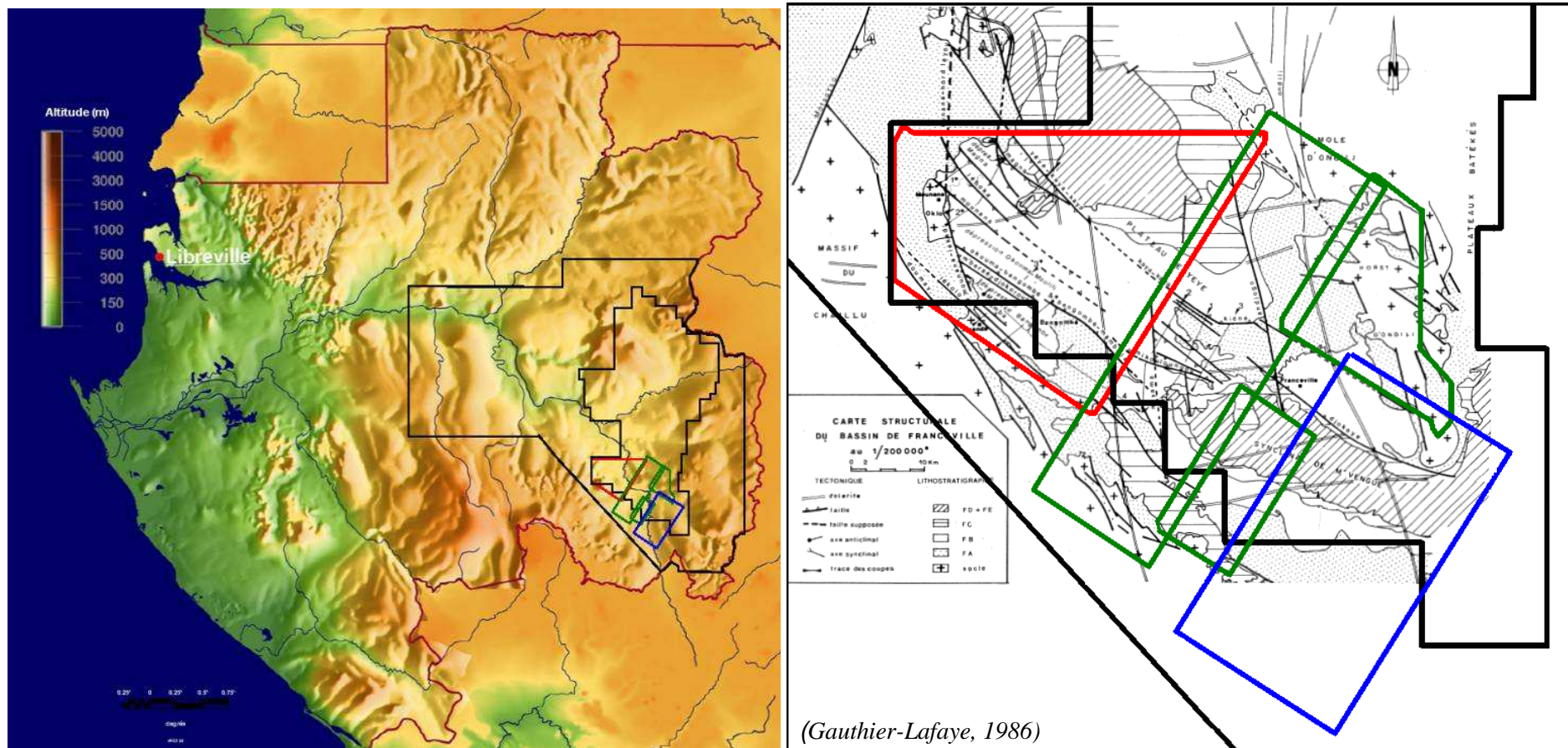
On montre que : $Z_1 = \frac{H_{SA}(\Phi)|_{x=0, z=0}}{|TAM_{zz}|_{x=0, z=0}}$





- ▶ 1- Les fonctions magnétiques caractéristiques
- ▶ 2- Superpotentiels et Tenseur de l'Anomalie Magnétique : Applications
- ▶ 3- **Prospection aéromagnétique du Bassin de Franceville**
- ▶ 4- Conclusions et perspectives

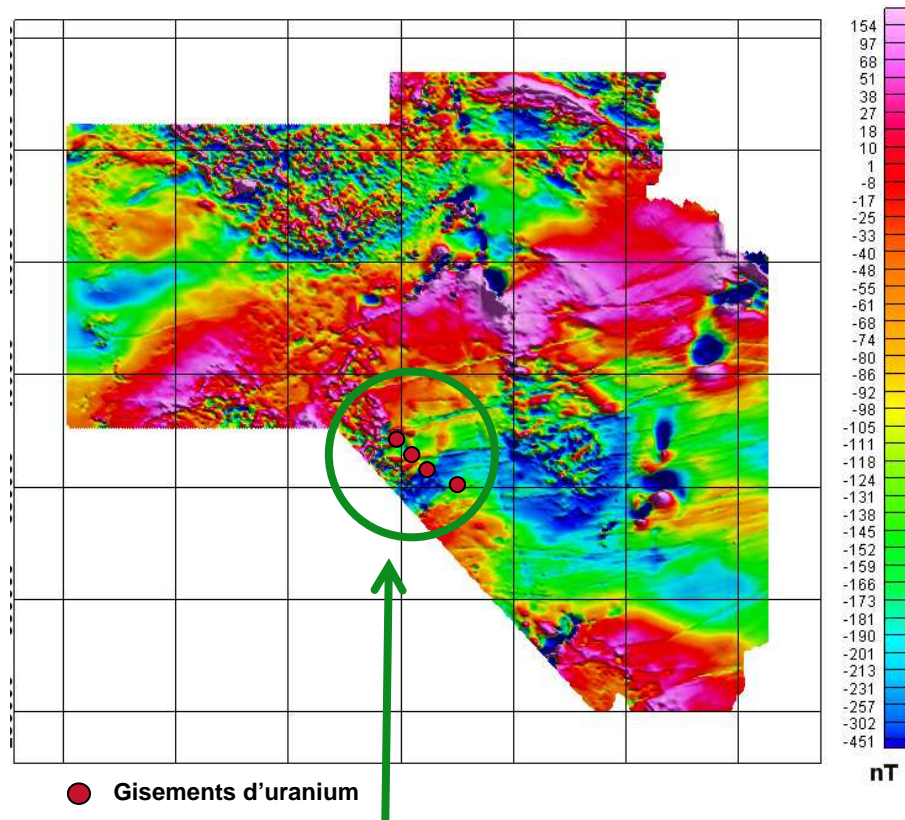
3.1.1 Levés aéromagnétiques dans la région de Franceville



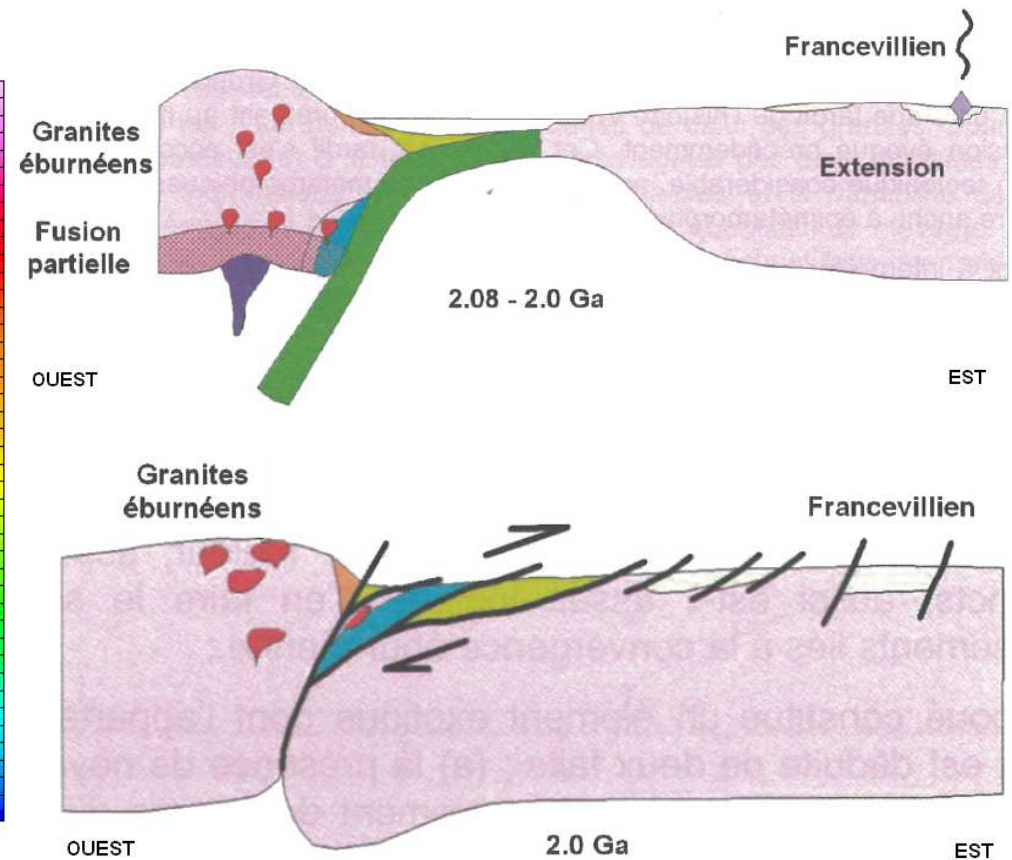
Localisation générale des différents levés sur le territoire gabonais et dans le Bassin de Franceville

3.1.2 Structuration générale du Bassin de Franceville

Carte d'anomalie du champ total (CGG 1983)



Zone d'étude : secteur Oklo

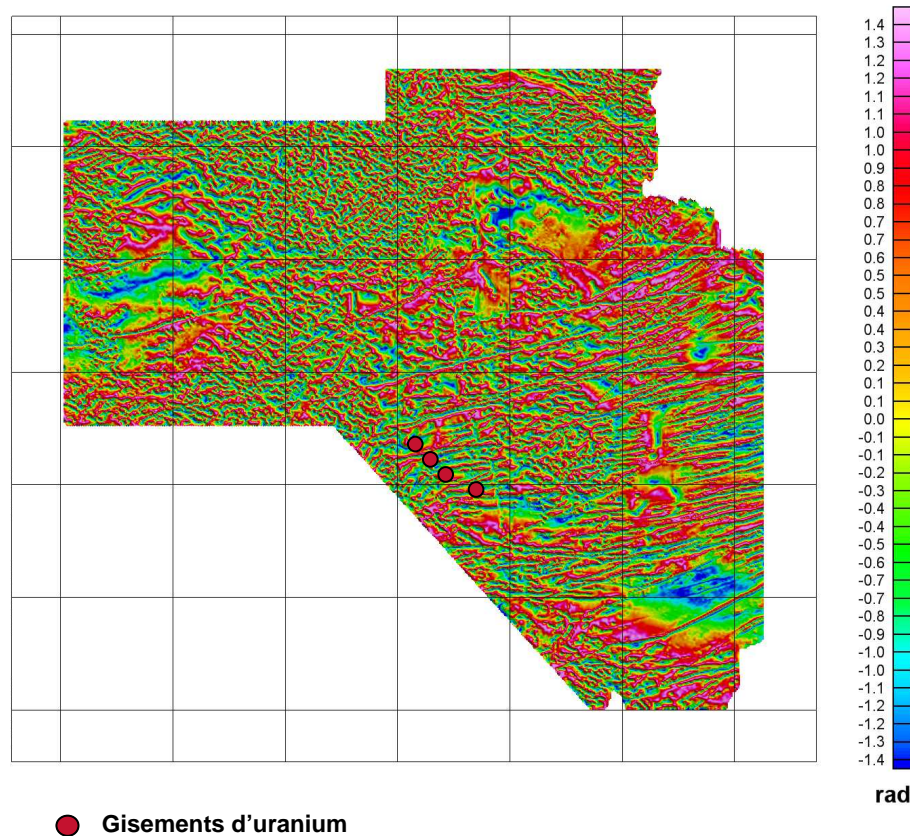


(D'après Feybesse, 1998)

- Bassin sédimentaire, grésopélitique, du protérozoïque reposant sur un socle cristallin archéen (2.7 Ga).

3.1.2 Structuration générale du Bassin de Franceville

Carte de la dérivée horizontale du tilt angle



Opérateur de dérivation horizontale du tilt angle :

$$H_{DH_TA} = \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2}$$

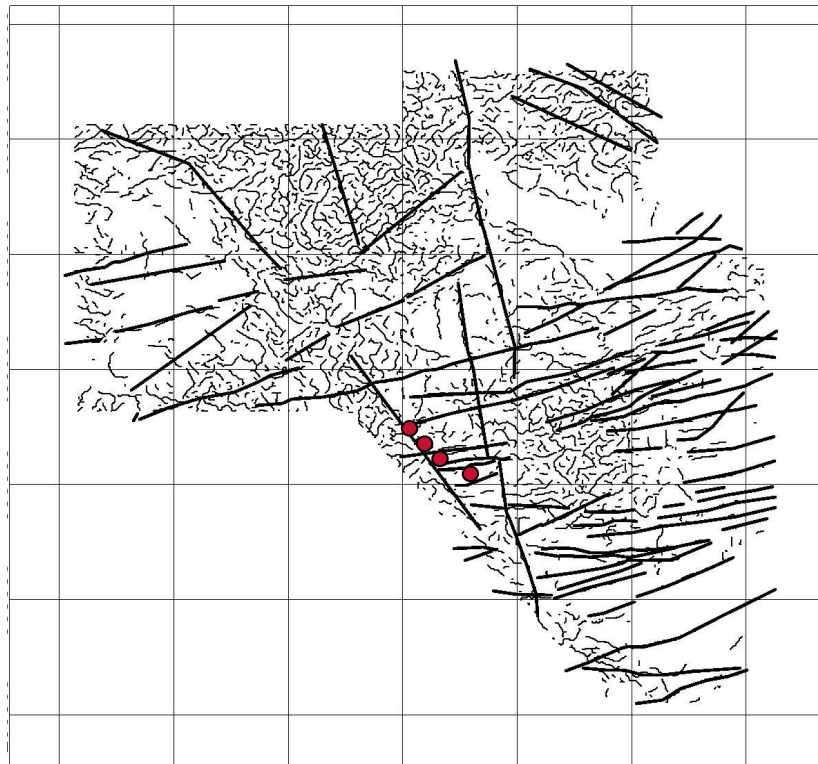
avec

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\frac{\partial F_1}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2}}$$

(Miller et Singh, 1994)

3.1.2 Structuration générale du Bassin de Franceville

Carte d'analyse structurale



● Gisements d'uranium

► Trois structurations principales :



◆ *Grands accidents NS*

Directions régionales de l'orogénèse éburnéenne.

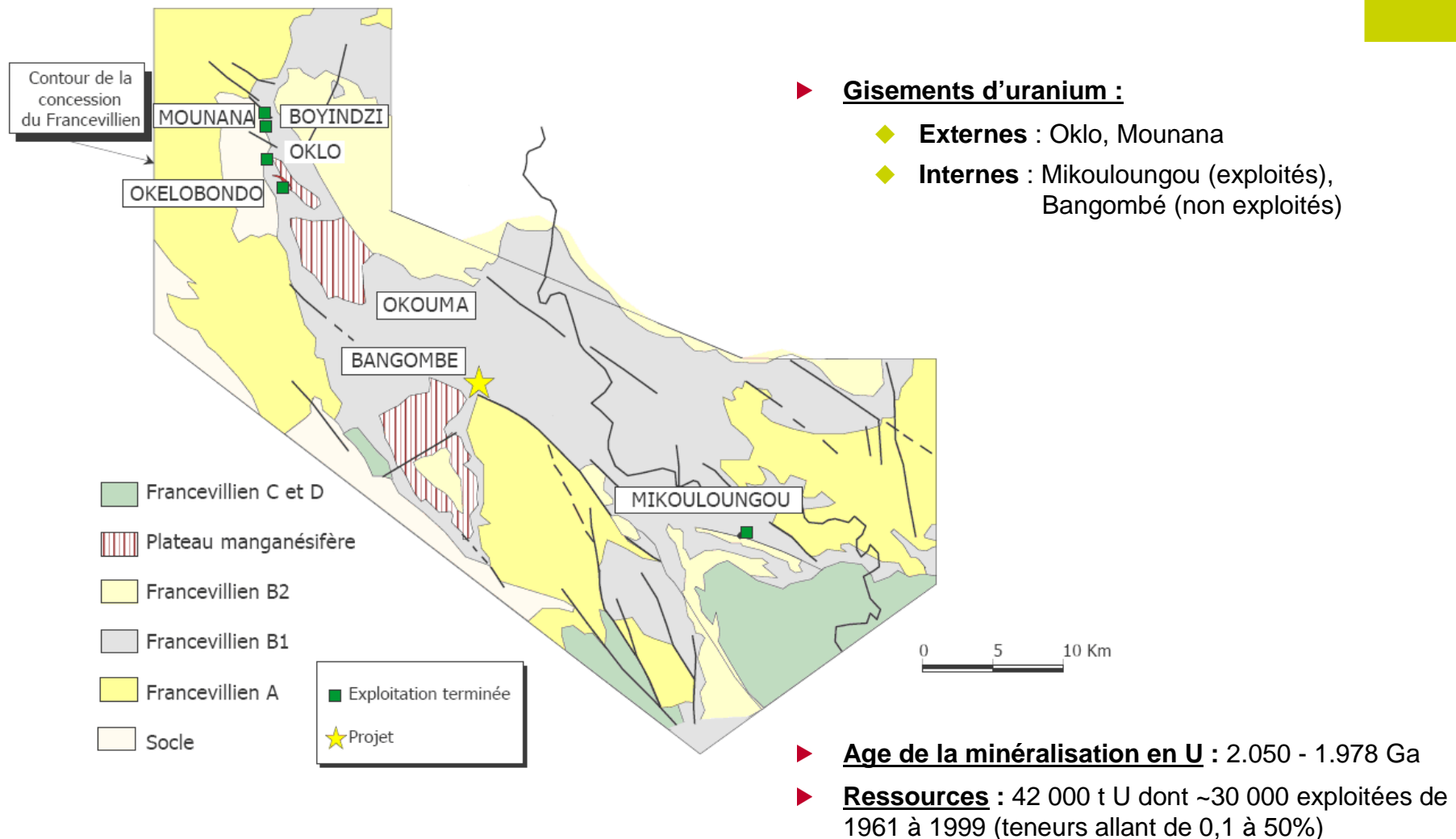


◆ Deux grands types accidents :
EO et s'infléchissant NO-SE

Tectonique extensive en horsts et grabens subsidents pendant le dépôt du Francevillien.

► Mise en place d'un réseau de filons de dolérite NS et EO entre 700 et 900 Ma.

3.1.3 Potentiel uranifère du Bassin de Franceville

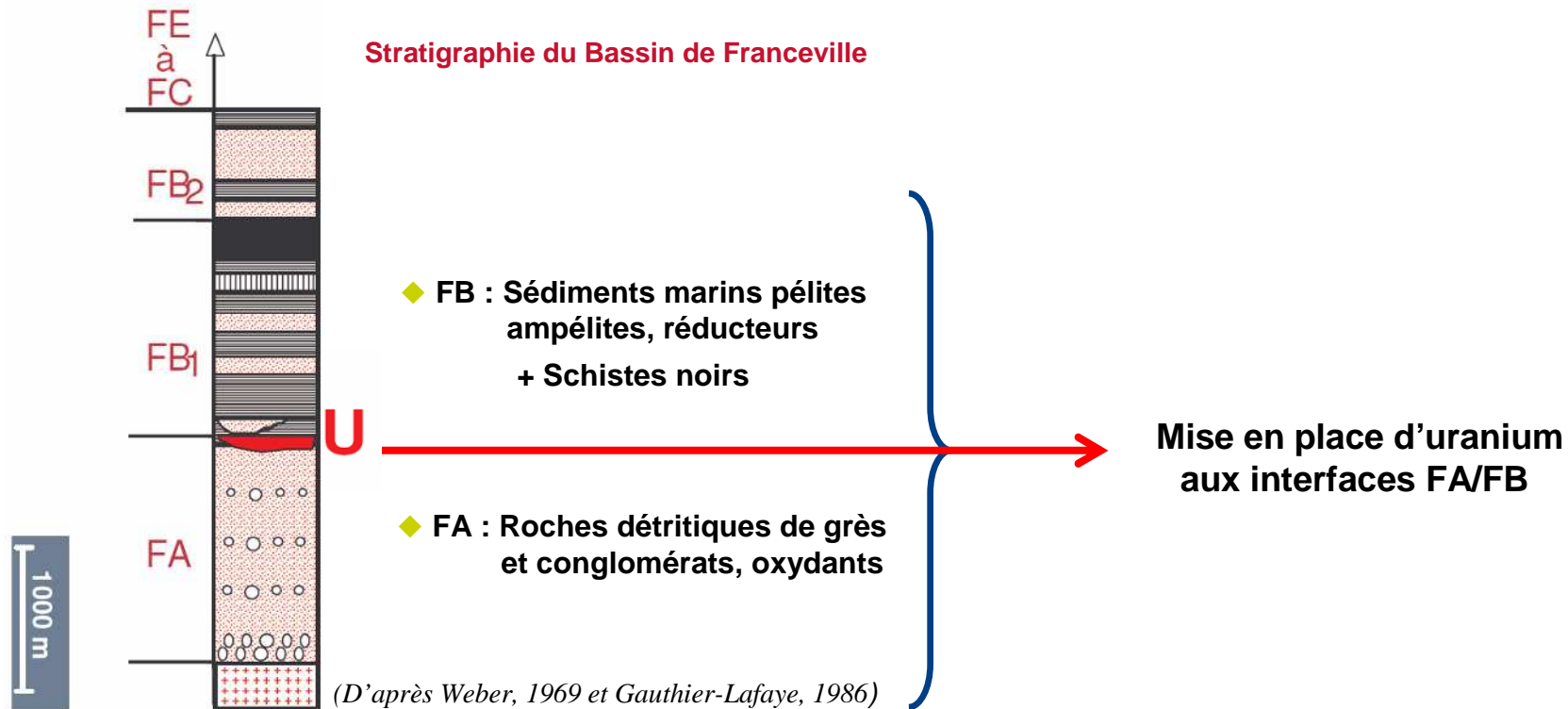


Gisements d'uranium dans le Bassin de Franceville

(d'après Matthieu, 2006)

3.1.4 Modèle métallogénique de l'uranium Francevillien

Contrôle Sédimentaire



Détection directe impossible : contraste de susceptibilité trop faible $\sim 10^{-5}$ SI.

3.1.4 Modèle métallogénique de l'uranium Francevillien

Contrôle Tectonique

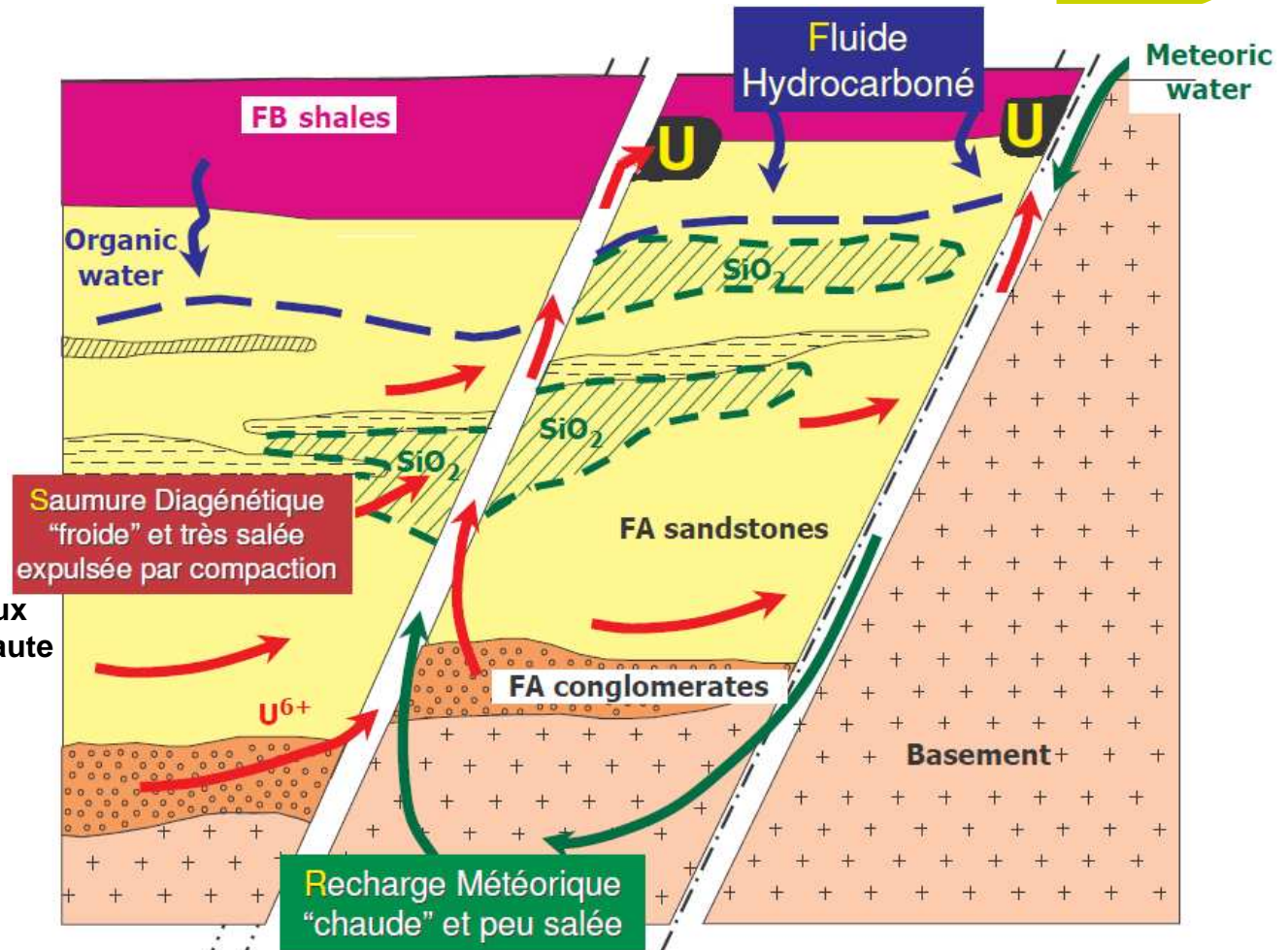
► Premier effet : échelle bassinale

- ◆ Effondrement du bassin modifiant la topographie du socle
- ↻ Puissants dépôts FA et FB
- ↻ Augmentation de la quantité d'uranium mobilisable.

► Deuxième effet : échelle locale

- ◆ Formation de pièges structuraux à hydrocarbures en position haute le long de failles perméables
- ↻ U^{6+} contenu dans les fluides diagénétiques précipite en UO_2 .

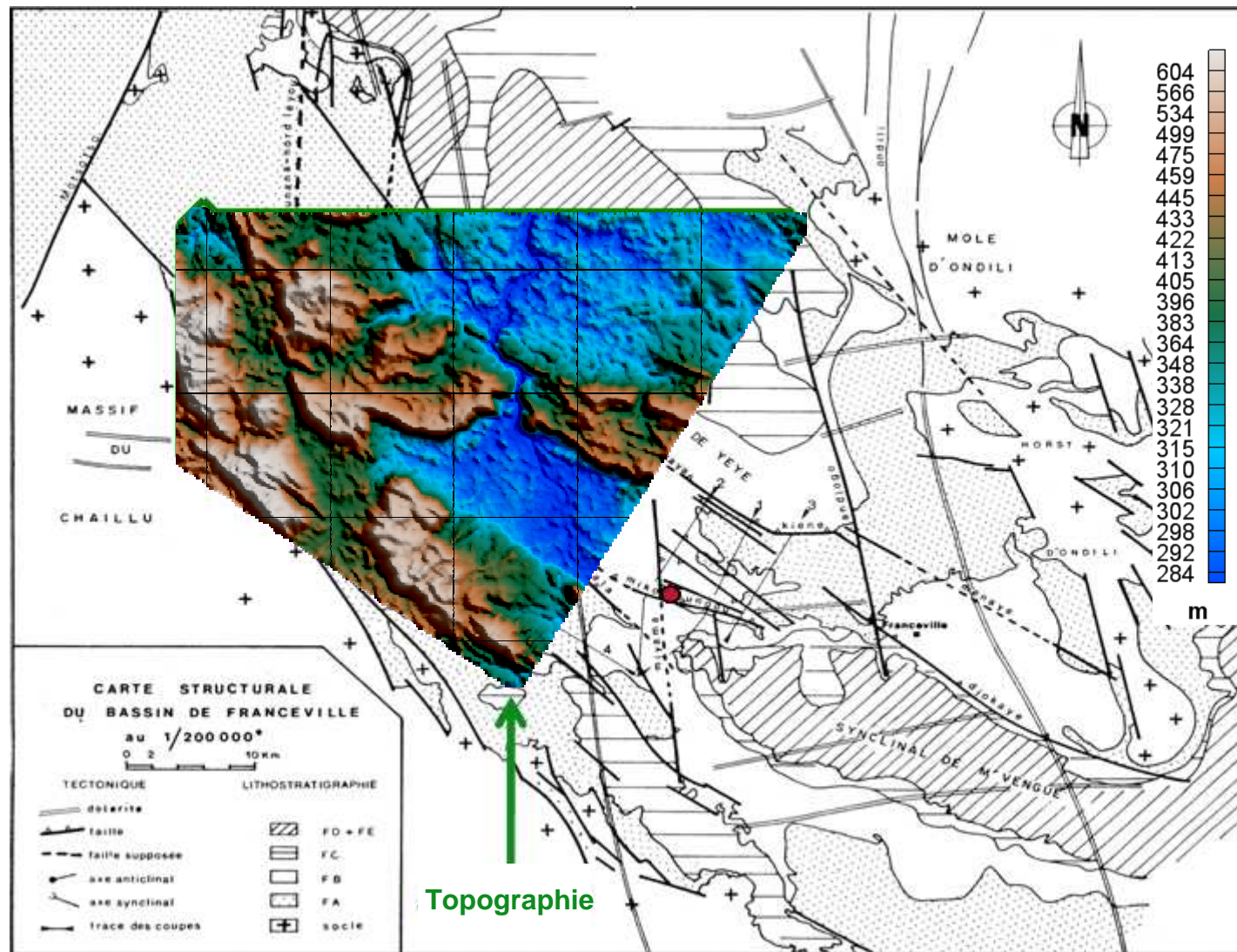
➡ Localiser les grands couloirs de failles et oscillations du socle



Modèle métallogénique de l'uranium Francevillien

(modifié d'après Matthieu, 2001)

3.1.5 Zone d'intérêt stratégique



● Gisements d'uranium

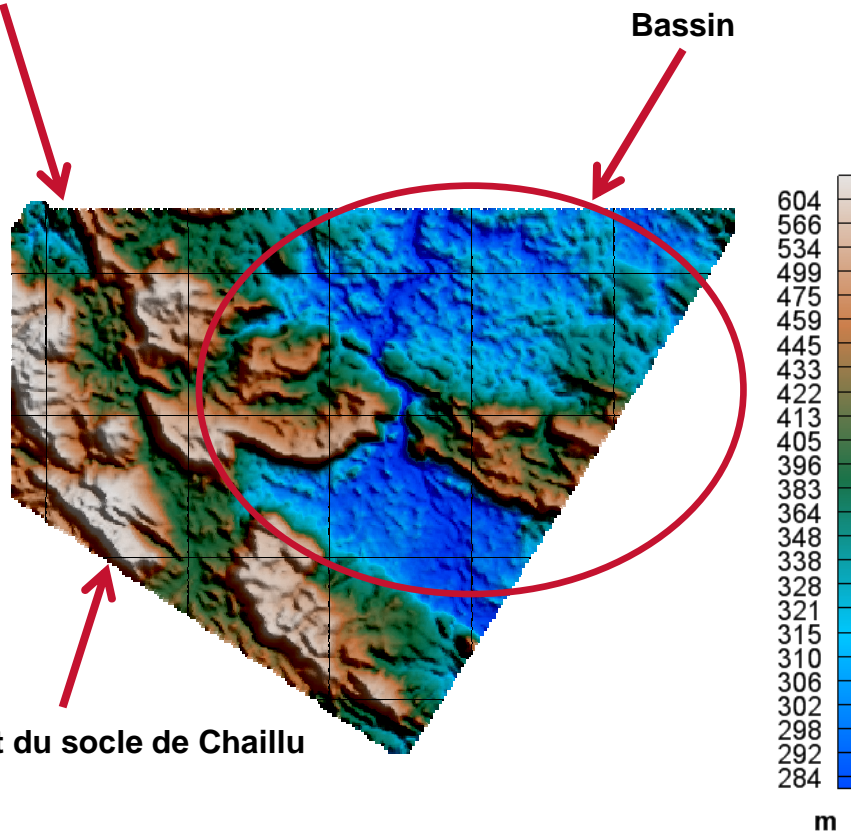
(Gauthier-Lafaye, 1986)

3.1.5 Zone d'intérêt stratégique

Accident NO SE de
Mounana-Lékédi

Bassin

Plongement du socle de Chaillu



Topographie

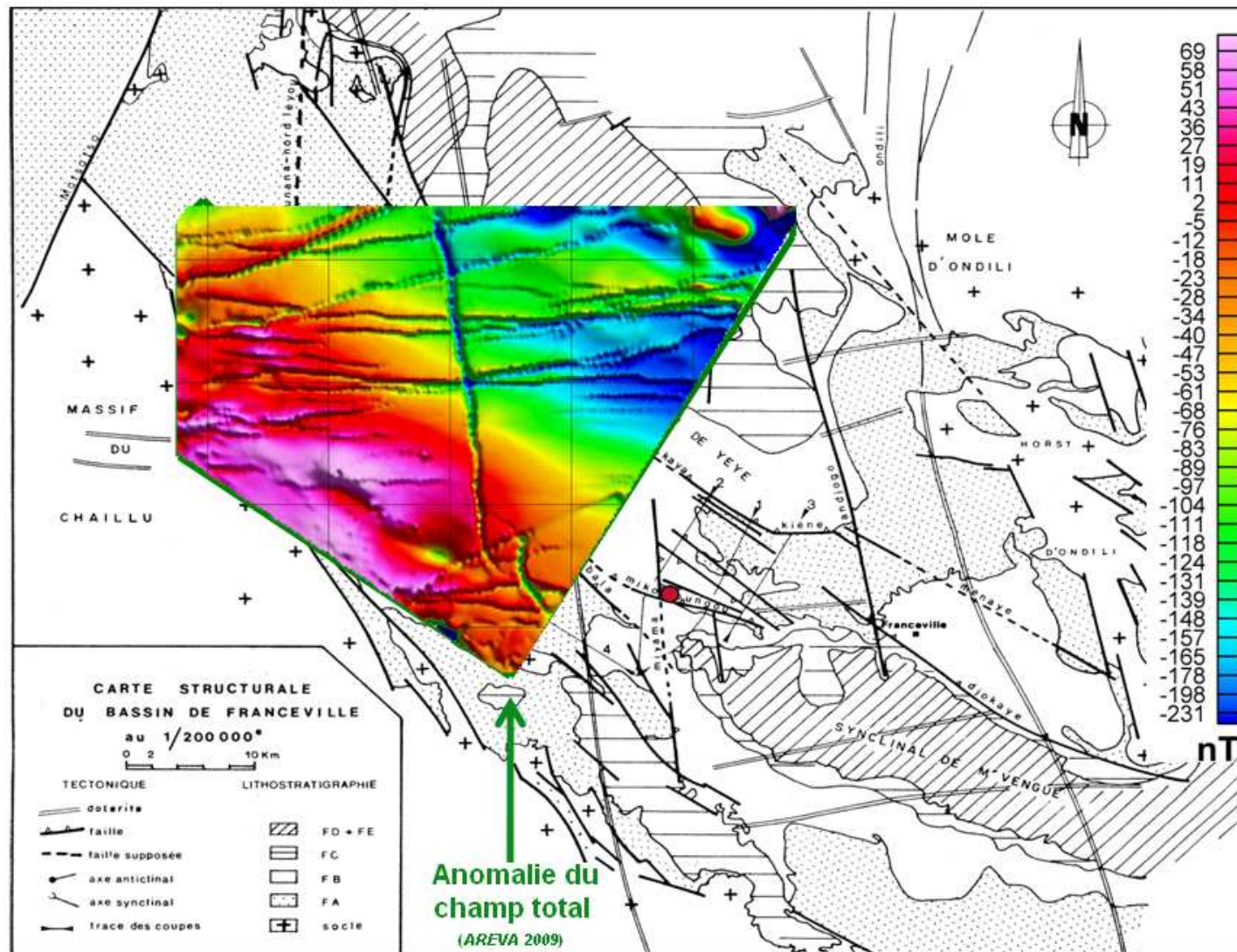
Signatures
géomorphologiques :

◆ Limite Sud du bassin

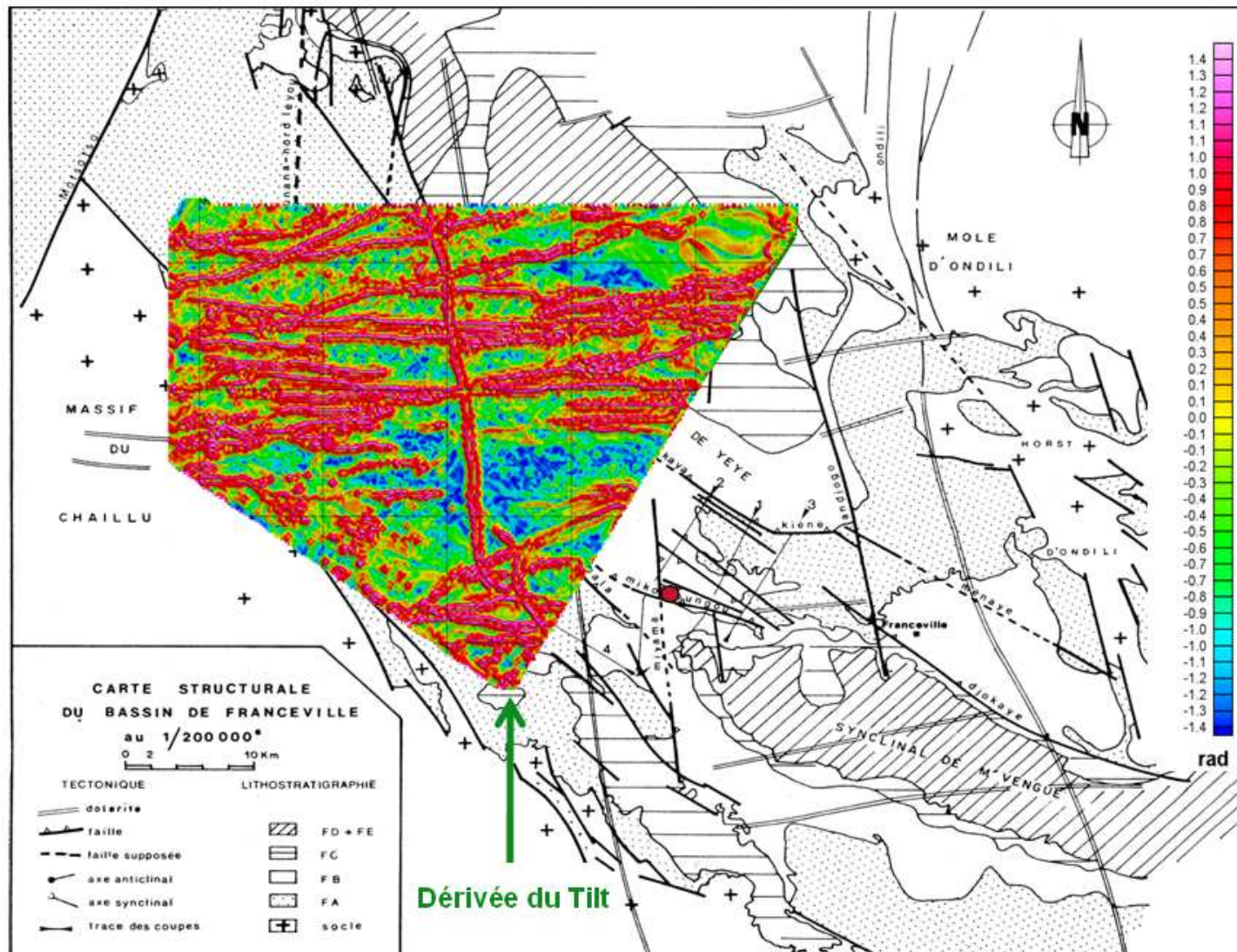
◆ Structuration du bassin
NO-SE

➡ Localiser les grands
couloirs de failles NO-SE et
les limites Nord du bassin

3.1.5 Zone d'intérêt stratégique



3.1.5 Zone d'intérêt stratégique



● Gisements d'uranium

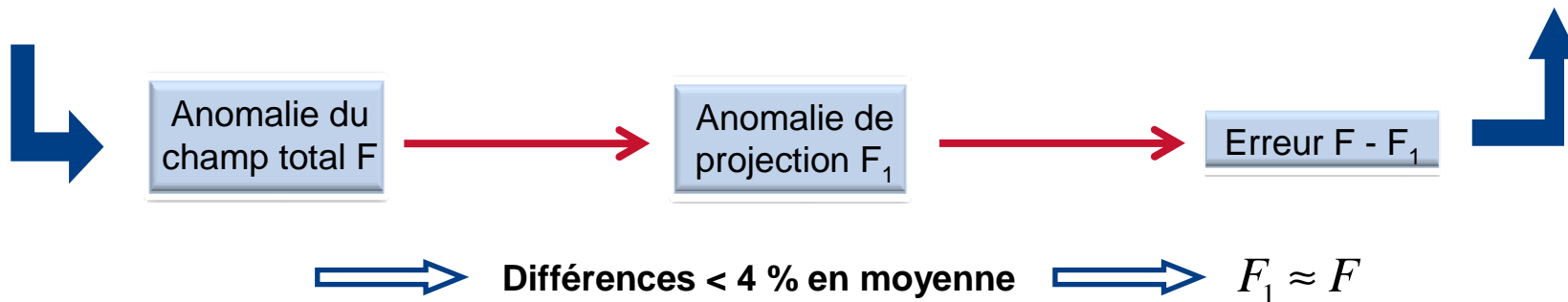
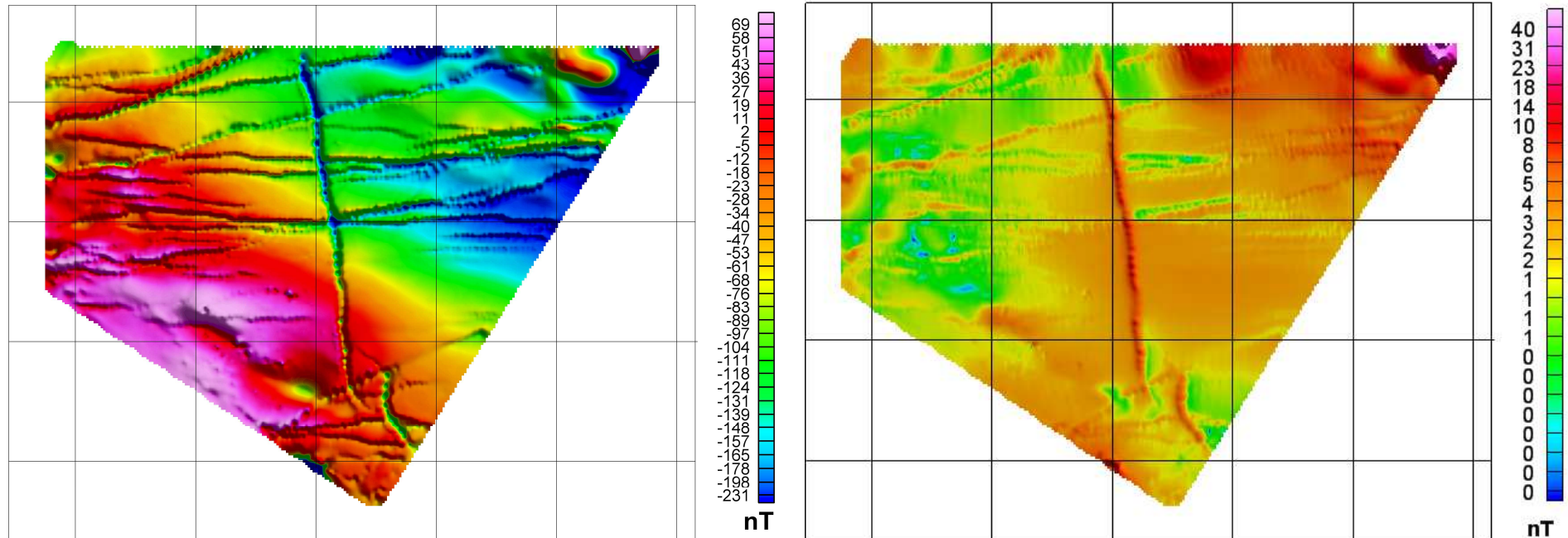
(Gauthier-Lafaye, 1986)

Linéations
magnétiques
majeures NS et EO



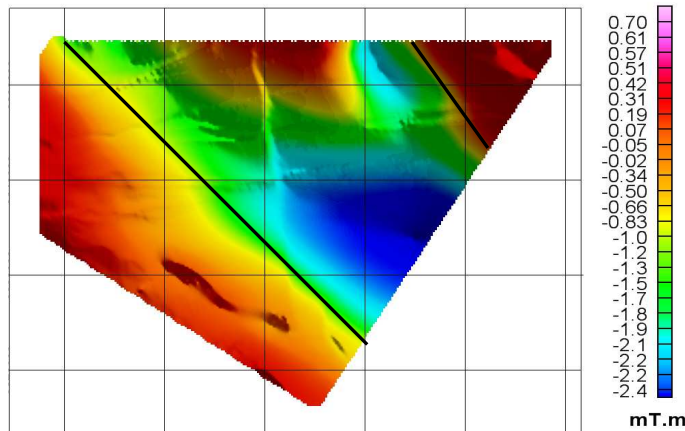
Effet gênant pour
détecter les failles
NO-SE

3.1.6 Comparaison entre F et F_1 : Levé aéroporté

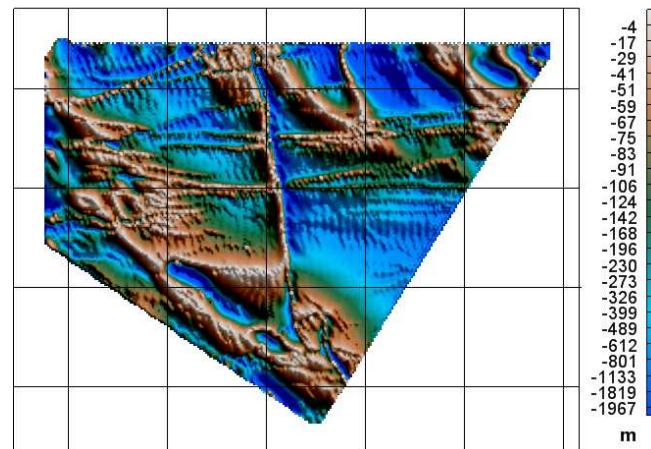
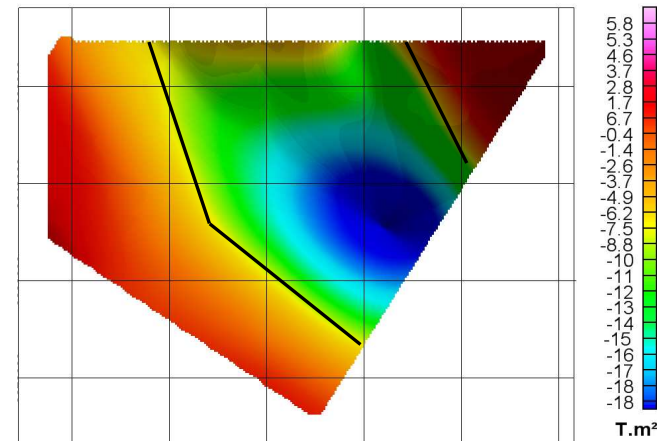


3.2.1 Etude du signal grande longueur d'onde

Potentiel

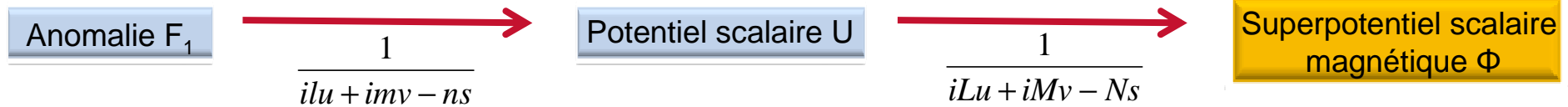


Superpotentiel

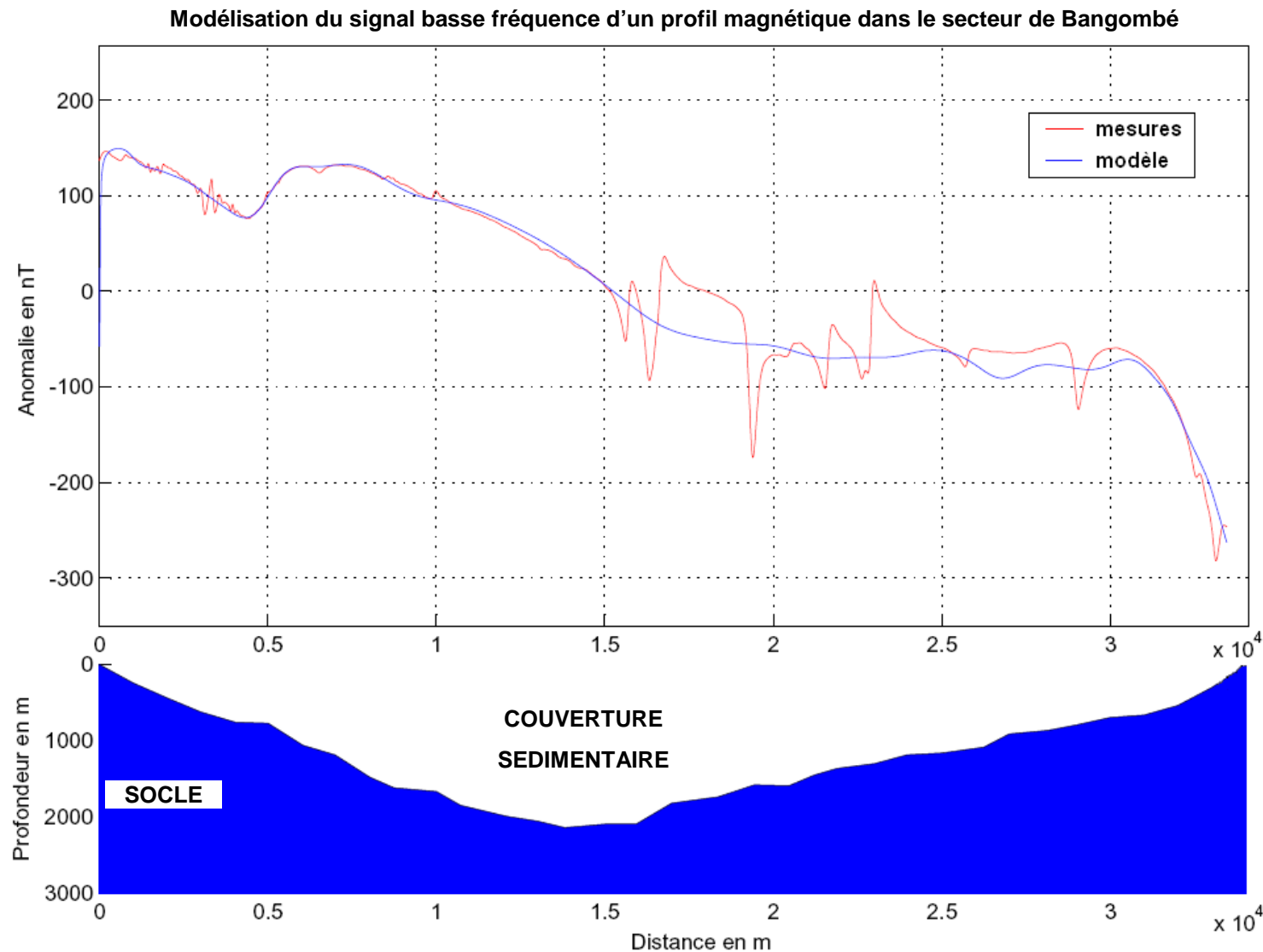


Carte de profondeur des sources aimantées

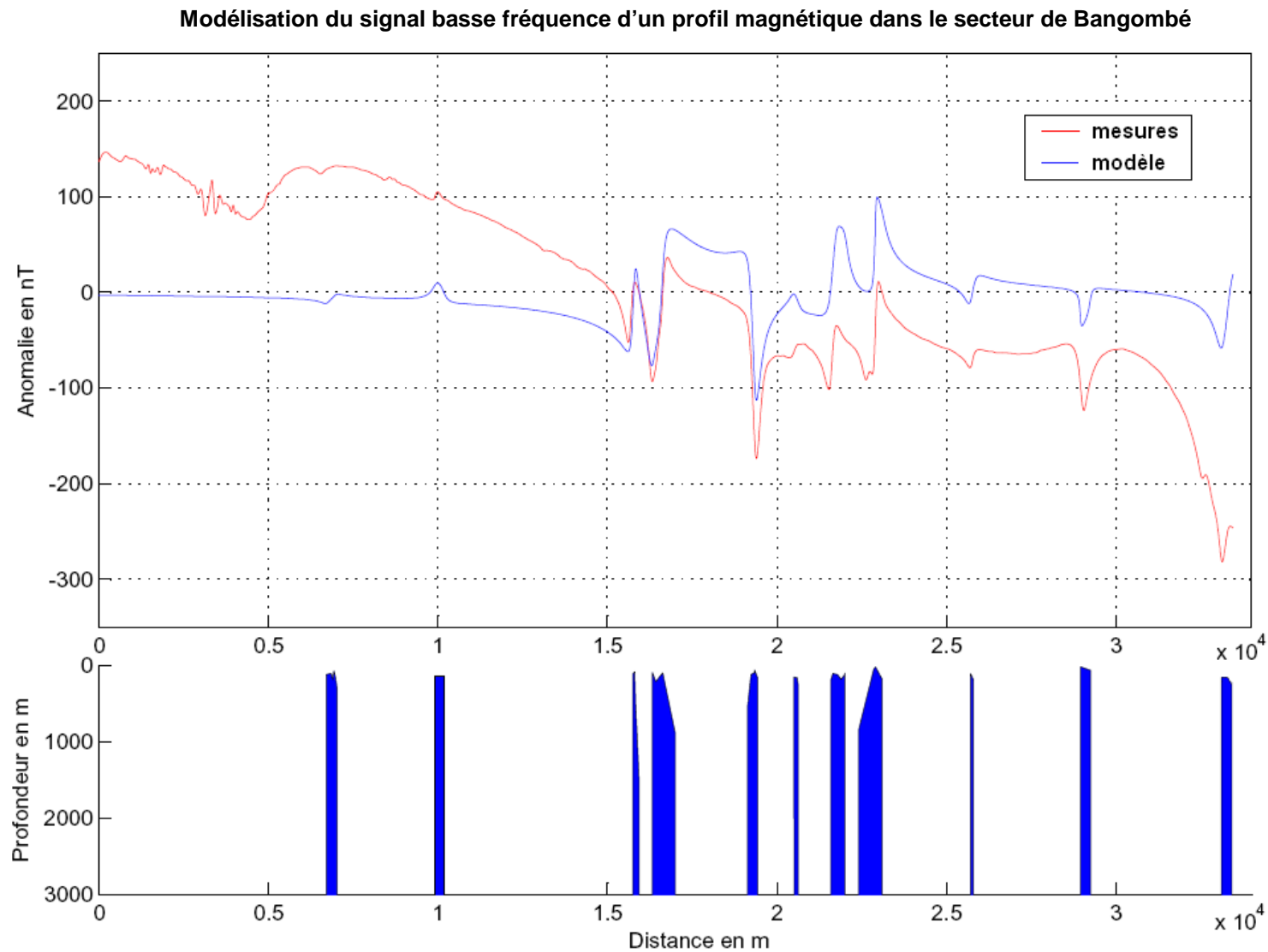
Rapport de l'amplitude du signal analytique
du superpotentiel sur TAM_{zz}



3.2.2 Modélisation/Inversion 2D par la méthode de Talwani

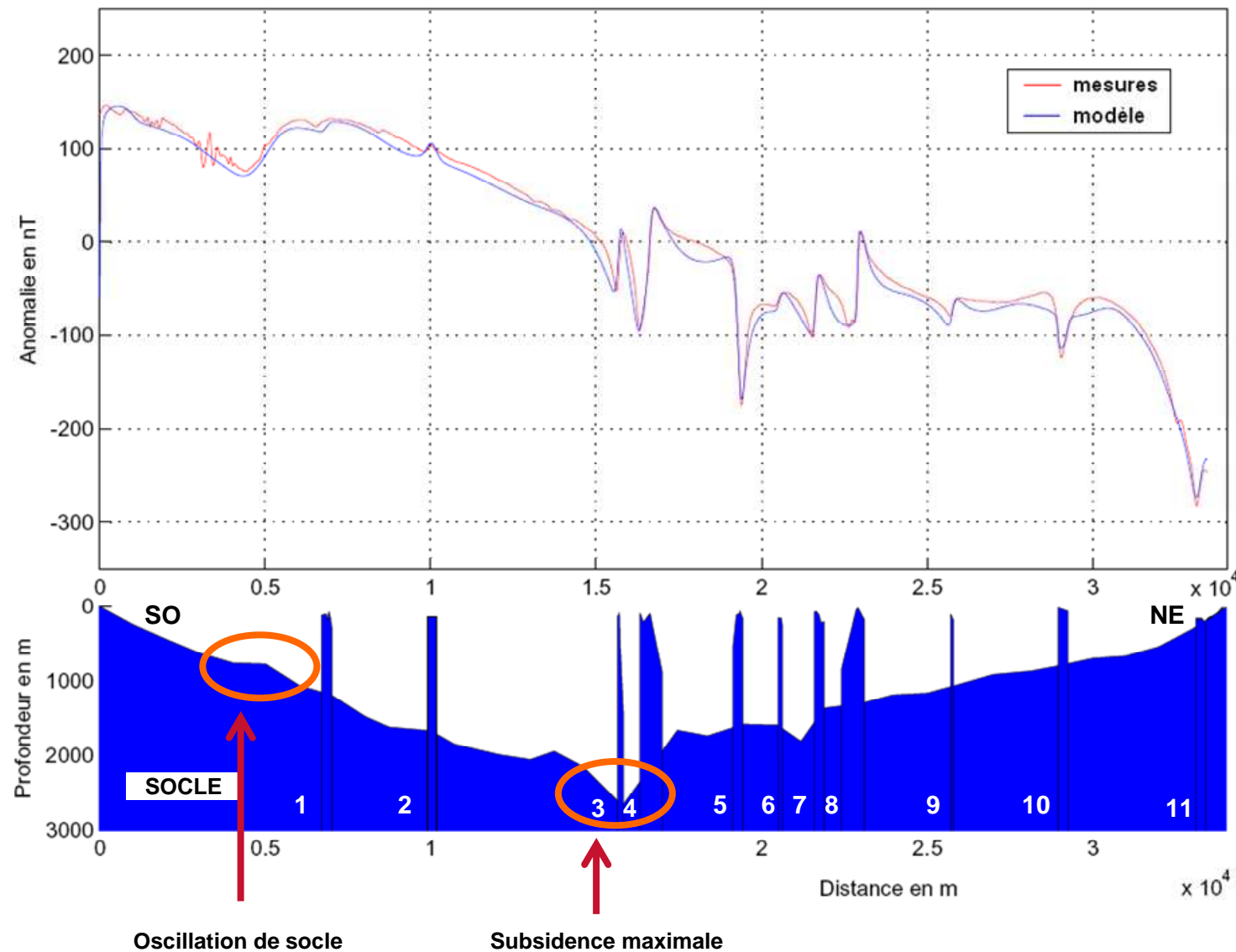


3.2.2 Modélisation/Inversion 2D par la méthode de Talwani

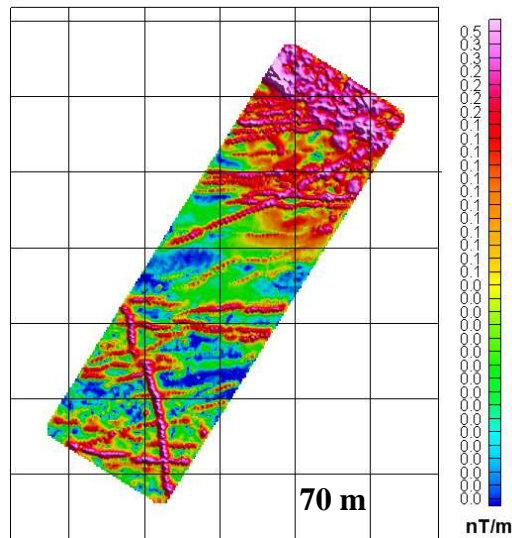


3.2.2 Modélisation/Inversion 2D par la méthode de Talwani

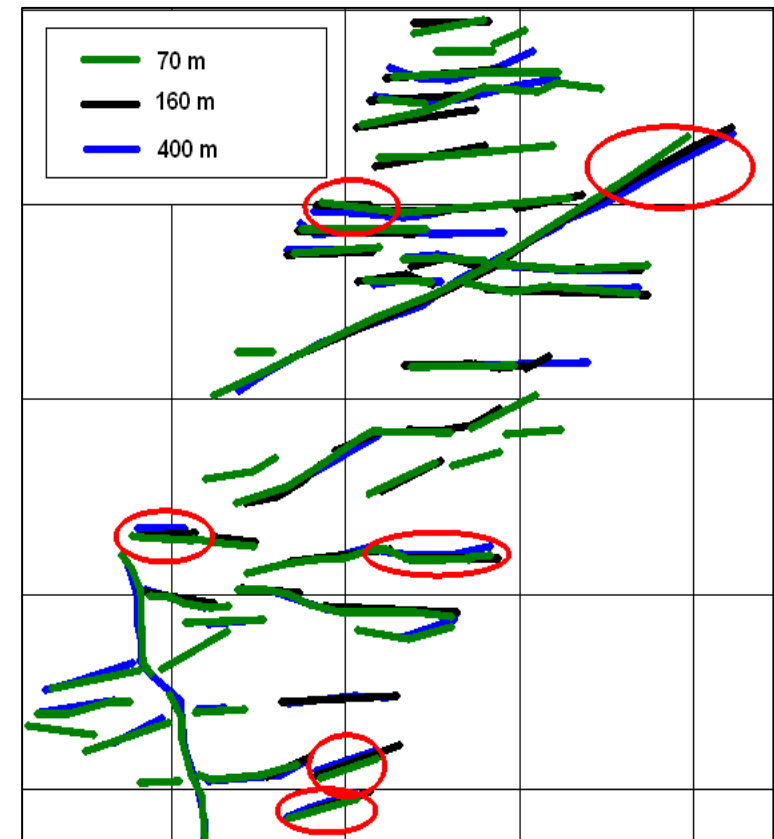
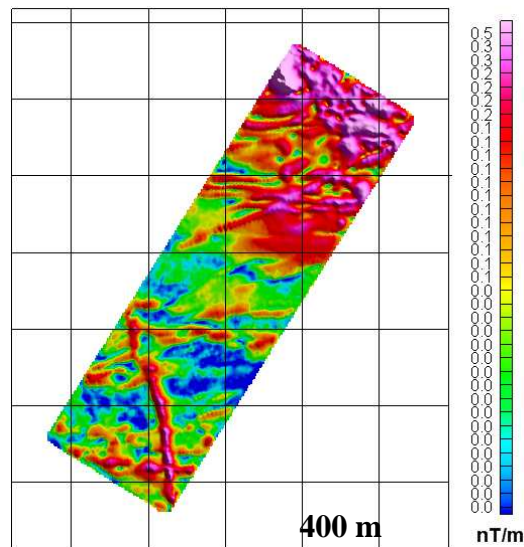
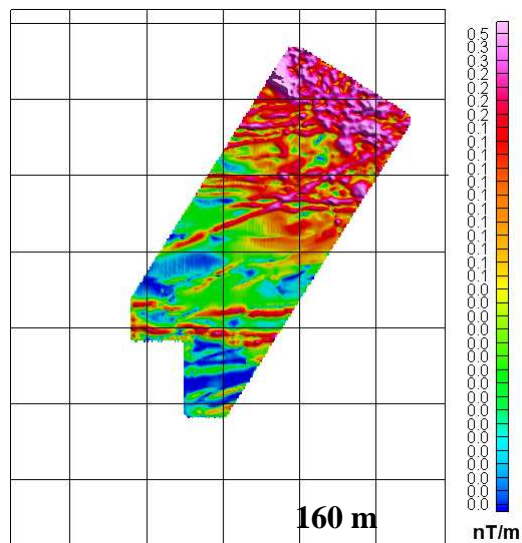
Modélisation du signal basse fréquence d'un profil magnétique dans le secteur de Bangombé



3.2.3 Etude multi-échelle : Signaux analytiques à différentes altitudes

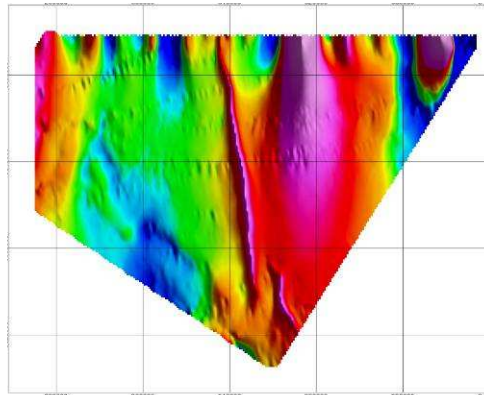


Amplitudes des signaux analytiques de trois levés aéromagnétiques

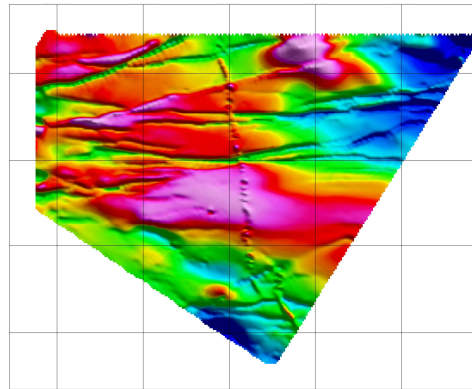


Superposition des maxima correspondants aux contacts.
Les segments décalés sont cerclés en rouge.

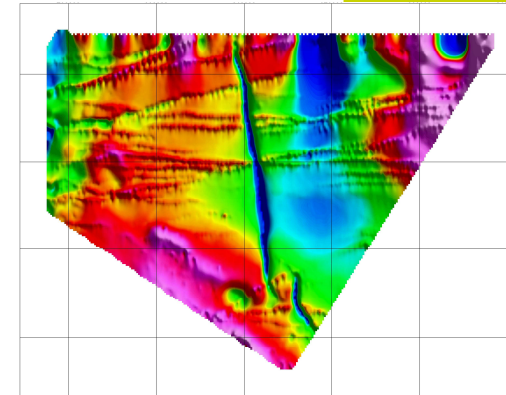
3.3.1 Tenseur de l'Anomalie Magnétique



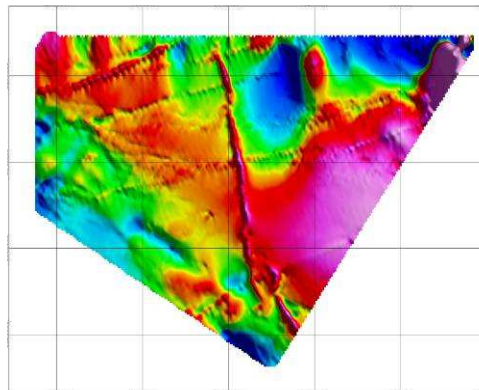
TAM_{xx}



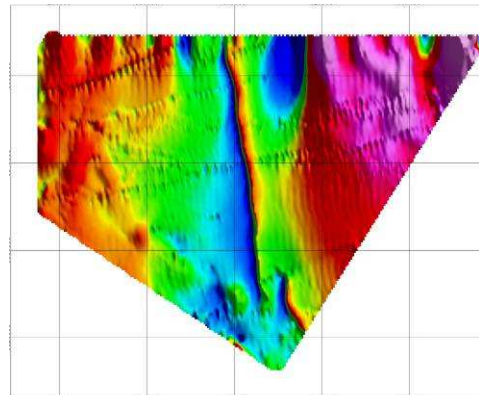
TAM_{yy}



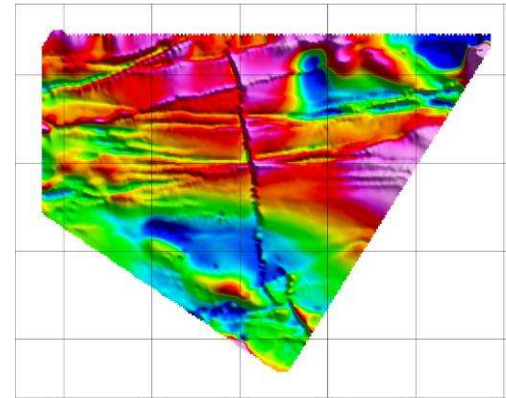
TAM_{zz}



TAM_{xy}



TAM_{xz}



TAM_{yz}

Anomalie de projection F_1

$$\frac{1}{(ilu + imv - ns)^2}$$

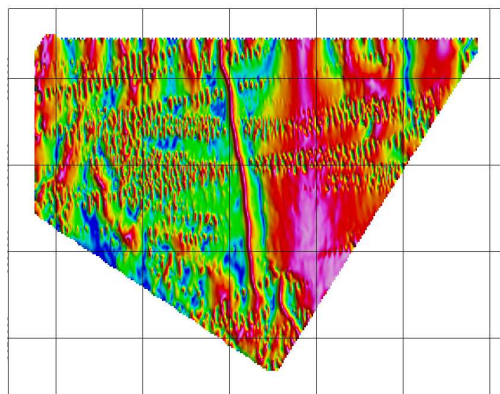
Superpotentiel scalaire magnétique Φ

$$\begin{bmatrix} u^2 & uv & ius \\ -uv & v^2 & ivs \\ ius & ivs & -s^2 \end{bmatrix}$$

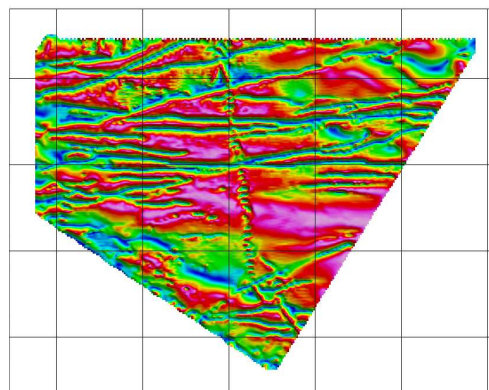
Tenseur de l'Anomalie Magnétique

Cartes de la dérivée du tilt angle
de chaque composante

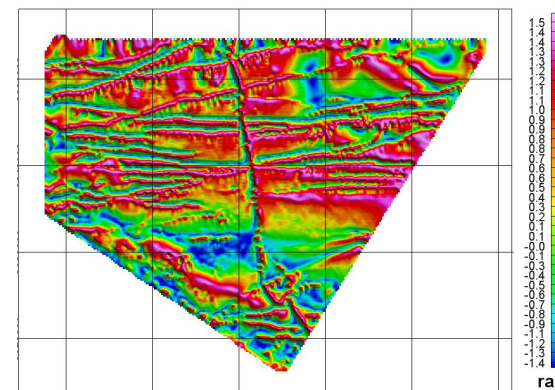
3.3.1 Tenseur de l'Anomalie Magnétique



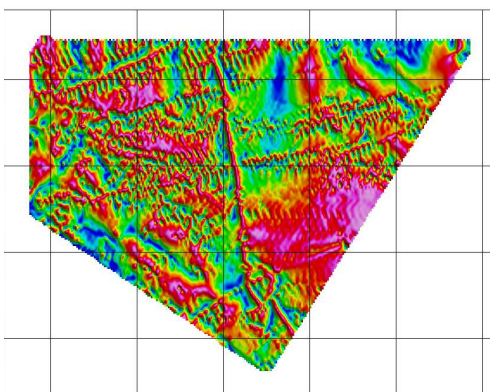
TAM_{xx}



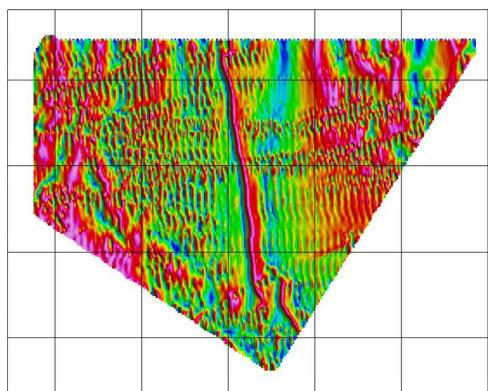
TAM_{yy}



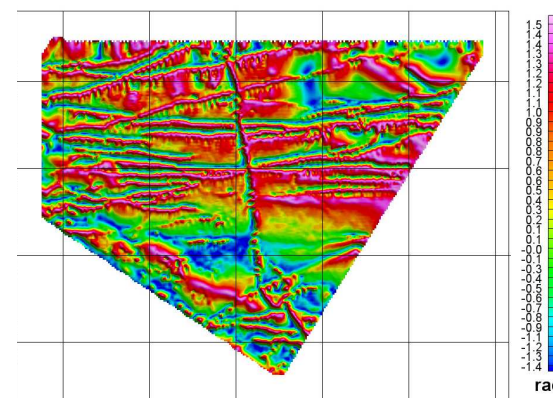
TAM_{zz}



TAM_{xy}



TAM_{xz}



TAM_{yz}

Anomalie de
projection F_1

$$\frac{1}{(ilu + imv - ns)^2}$$

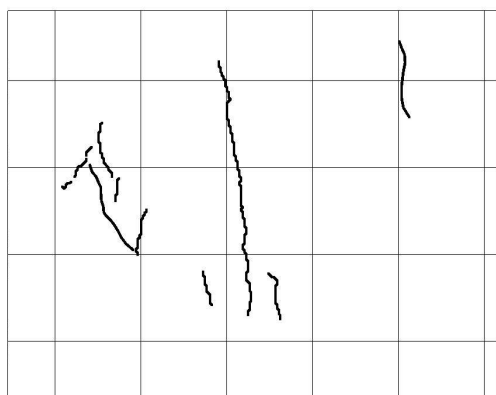
Superpotentiel scalaire
magnétique Φ

$$\begin{bmatrix} u^2 & uv & ius \\ uv & v^2 & ivs \\ ius & ivs & -s^2 \end{bmatrix}$$

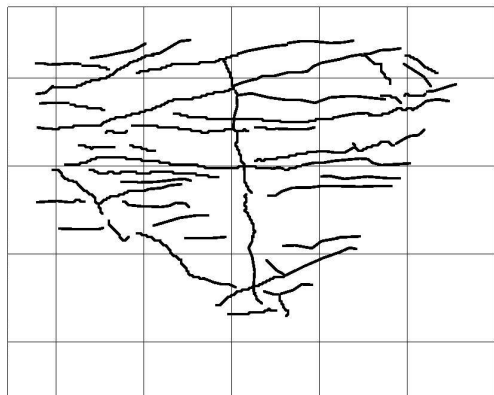
Tenseur de
l'Anomalie
Magnétique

Cartes d'analyse structurale
de chaque composante

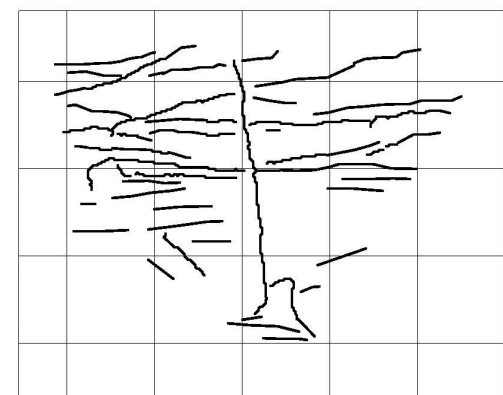
3.3.1 Tenseur de l'Anomalie Magnétique



TAM_{xx}



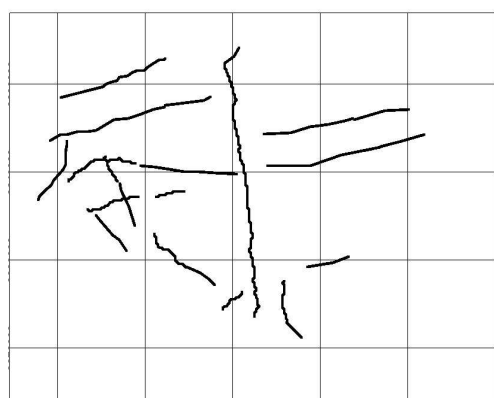
TAM_{yy}



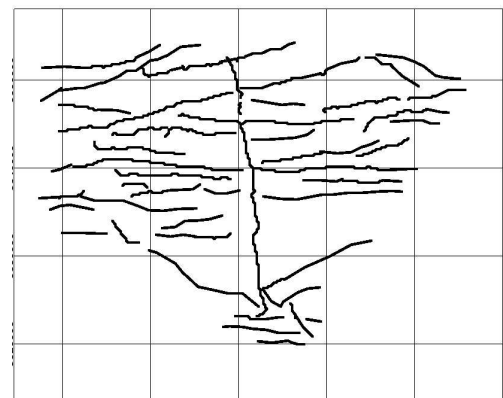
TAM_{zz}



TAM_{xy}



TAM_{xz}



TAM_{yz}

Anomalie de
projection F_1

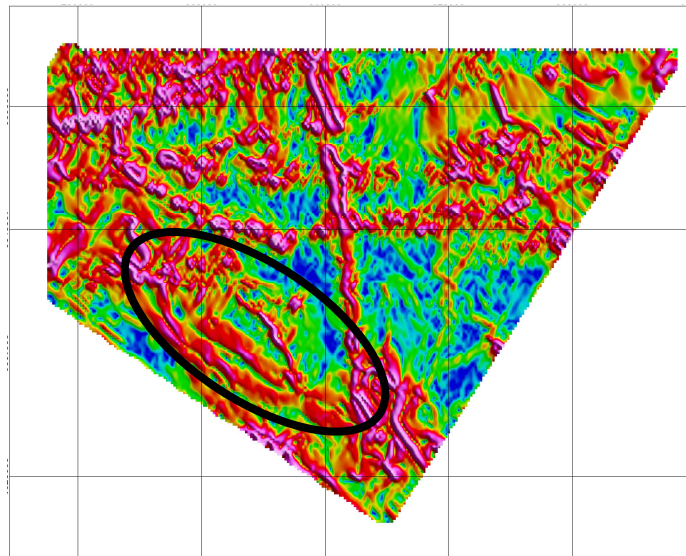
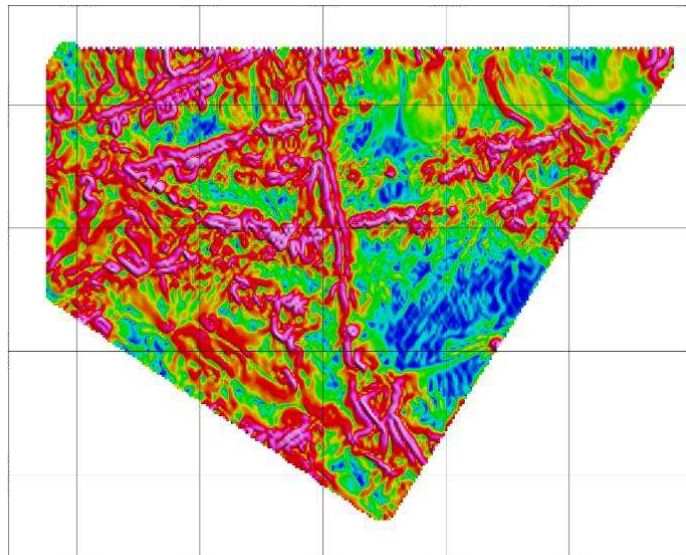
$$\frac{1}{(ilu + imv - ns)^2}$$

Superpotentiel scalaire
magnétique Φ

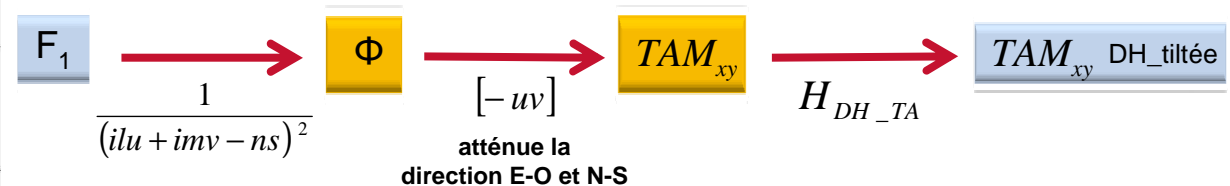
$$\begin{bmatrix} u^2 & uv & ius \\ -uv & v^2 & ivs \\ ius & ivs & -s^2 \end{bmatrix}$$

Tenseur de
l'Anomalie
Magnétique

3.3.2 Mise en évidence des directions NO-SE par réduction croisée



Traitement intermédiaire : Tenseur de l'Anomalie Magnétique et tilt angle



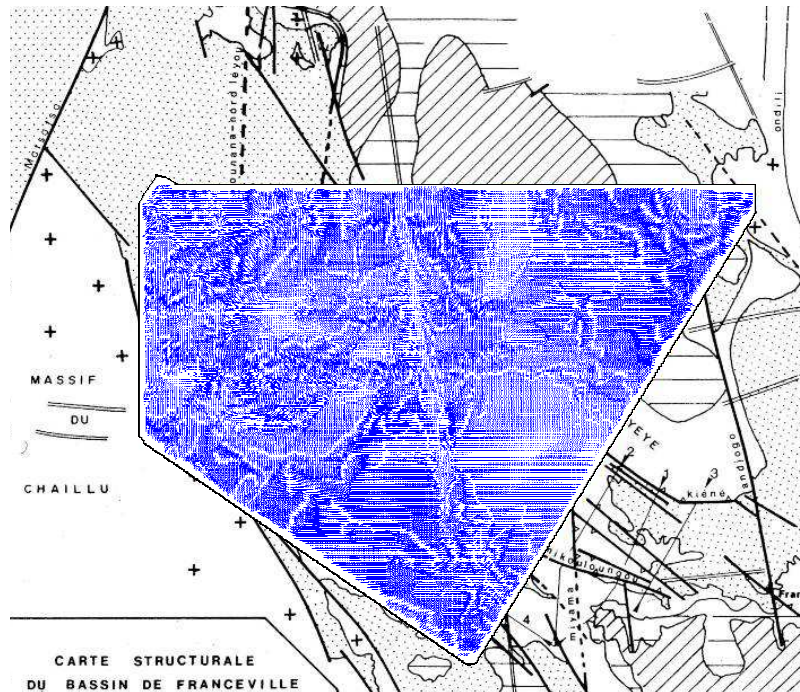
Structures NO-SE détectables

Traitement final : filtrage directionnel et tilt angle



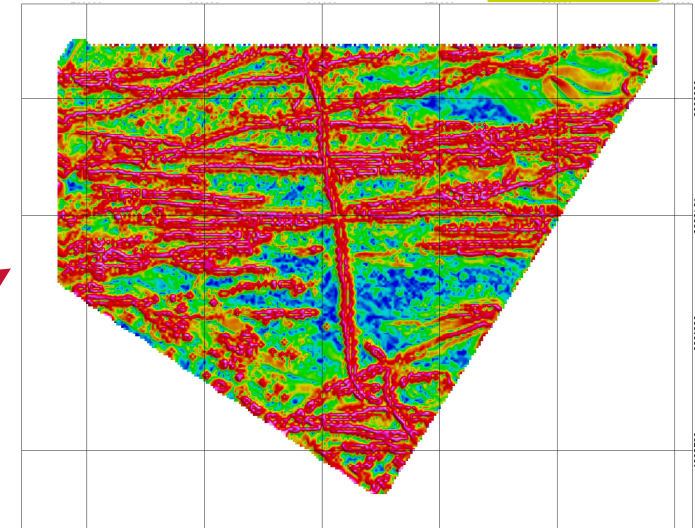
$$H_\alpha = \left| \cos^n \left(\alpha - \omega + \frac{\pi}{2} \right) \right| \text{ ici } \alpha = 0^\circ (\text{NS}) \text{ et } n = 1 \text{ avec } \begin{cases} \cos \omega = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \sin \omega = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{cases}$$

3.3.2 Mise en évidence des directions NO-SE par réduction croisée

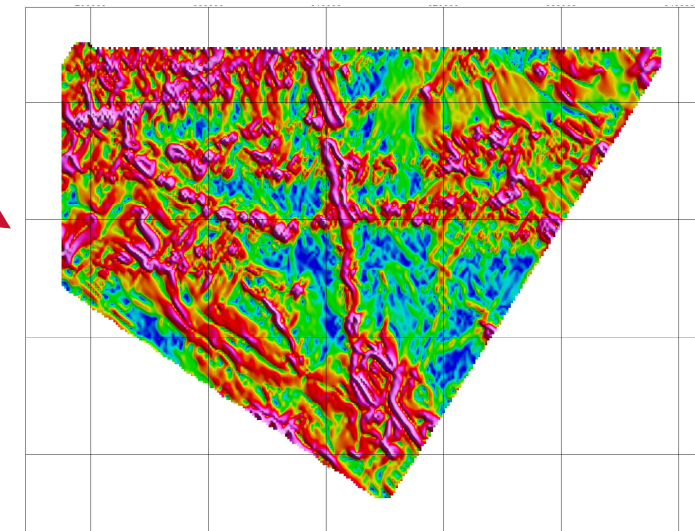


Troisièmes vecteurs propres

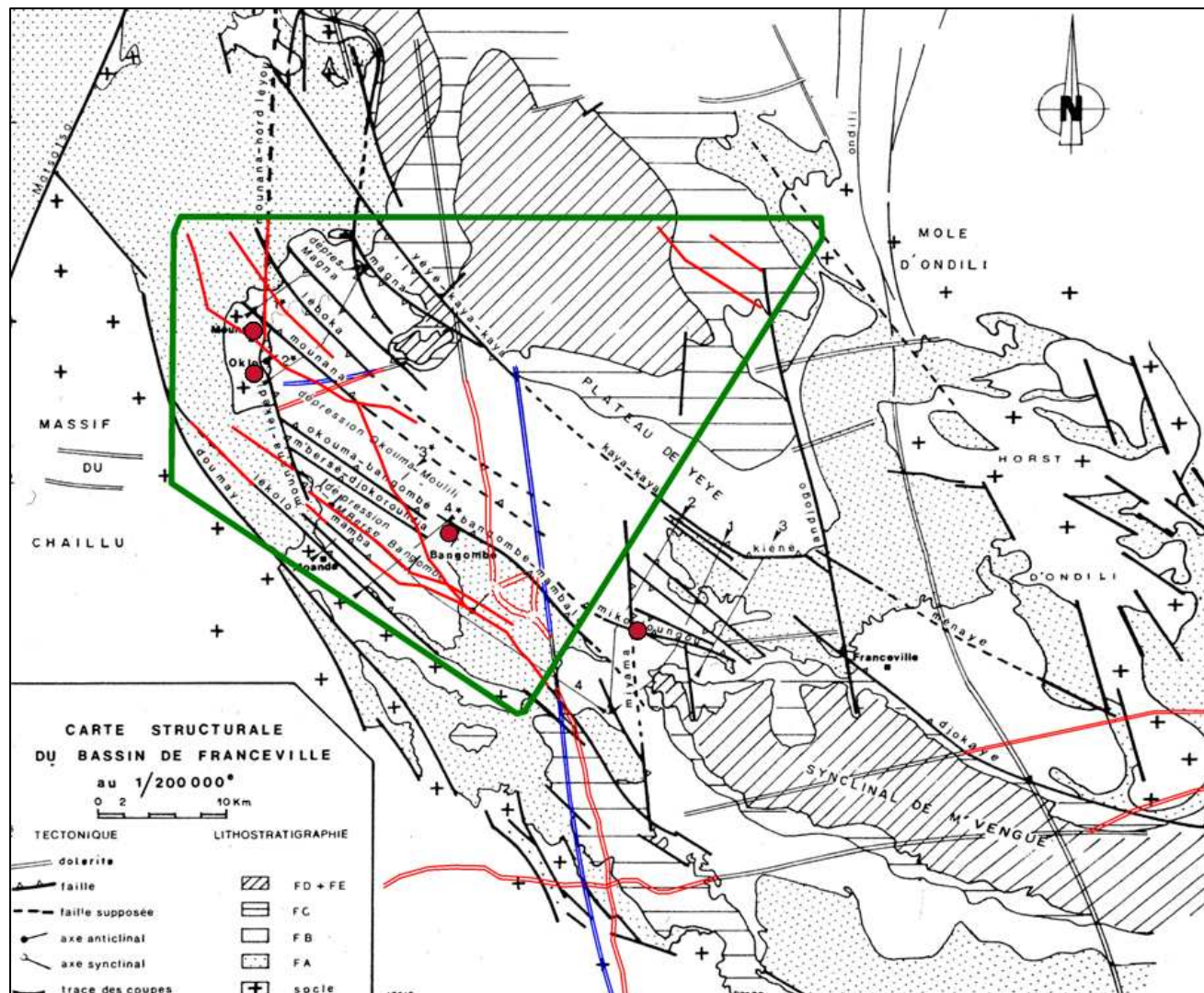
Traitement
classique



Traitement
amélioré



3.3.3 Réinterprétation de la carte structurale francevillienne



● Gisements d'uranium — Nouvelle structure — Erreur de positionnement — Zone d'étude

Intersection des structures
NO-SE et EO



Gisements potentiels ??

Symétrique d'Oklo en
position interne ??

(Modifiée d'après Gauthier-Lafaye, 1986)



- ▶ 1- Les fonctions magnétiques caractéristiques
- ▶ 2- Superpotentiels et Tenseur de l'Anomalie Magnétique : Applications
- ▶ 3- Prospection aéromagnétique du Bassin de Franceville
- ▶ 4- Conclusions et perspectives

Conclusions

- ▶ **Estimer F_1 à partir de F**
Formule de Lourenço revisitée
- ▶ **Introduction de nouvelles fonctions magnétiques : Superpotentiels et Tenseurs**
Fonctions extrémales à l'aplomb des sources
Prolégomènes au filtrage directionnel
- ▶ **Étude aéromagnétique du Francevillien**
Éléments nouveaux de gîtologie
Approche plus quantitative
- ▶ **Hypothèse** : directions d'aimantation supposées connues

Perspectives

- Utiliser une centrale d'attitude pour mesurer la grandeur vectorielle ou tensorielle.
- Appliquer à d'autres problématiques d'échelles différentes (Risque sismique Mongolie).
Comparer avec les autres outils de transformation de carte.
- Confronter les résultats avec des structuralistes.
Modélisation 2D sur tout le socle.
- Contraindre l'effet de la rémanence.



Merci de votre attention !



Steel-Magnesium Dipole (N/S)

de Carl André (artiste américain minimaliste né en 1935)

Méthode magnétique appliquée à l'exploration multi-échelle du Bassin de Franceville

Le but de ce travail de thèse est d'établir de nouveaux outils en méthode magnétique pour la caractérisation de cibles géologiques.

Dans un premier temps, nous présentons des développements théoriques et numériques relatifs aux méthodes potentielles et en particulier magnétique, dans les domaines spatial et spectral.

Nous généralisons l'opération de réduction au pôle afin de symétriser à l'aplomb d'une source magnétique quelconque les fonctions magnétiques caractéristiques. Ainsi, les superpotentiels sont introduits de manière originale en méthode magnétique. Nous définissons le tenseur de l'anomalie magnétique à partir des dérivées secondes du superpotentiel scalaire. Ces deux nouvelles fonctions présentent des propriétés intéressantes de symétrie permettant de faciliter l'interprétation d'une carte magnétique.

Dans un second temps, nous appliquons ces résultats à l'étude du Bassin de Franceville au Gabon dans un contexte d'exploration minière. L'objectif est d'établir une nouvelle cartographie de cibles potentiellement uranifères à partir de données aéromagnétiques fournies par AREVA NC.

L'étude du modèle métallogénique de l'uranium francevillien nous permet de relier la présence de pièges uranifères à l'existence d'anomalies magnétiques. Une étude multi-échelle est menée pour étudier aussi bien les couloirs de failles superficielles que le socle aimanté profond. Le tenseur de l'anomalie magnétique agissant comme un filtre directionnel se révèle particulièrement performant pour caractériser les structures 2D.

Pour conclure, nos résultats sont rassemblés sur une carte structurale fournissant aux structuralistes de nouveaux indices d'intérêt économique.

Mots clés :

Méthodes potentielles, Méthode magnétique, Anomalie magnétique, Superpotentiel, Tenseur, Prospection aéromagnétique, Exploration uranifère, Bassin de Franceville

Magnetic method for multi-scale exploration of the Franceville Basin

The purpose of this thesis is to develop new tools in magnetic method to characterize geological units. First, we present theoretical and numerical developments of the potential field theory for magnetic method in space and frequency domains.

We generalize the reduction-to-the-pole transformation so that symmetrical sources cause symmetrical magnetic functions. Thus, the superpotential functions are newly defined for magnetic methods. The magnetic anomaly tensor is defined as the superpotential second derivatives. These two new functions have interesting symmetry properties that help magnetic maps interpretation.

Second, we apply our results to analyze aeromagnetic data from the Franceville Basin collected in Gabon by AREVA NC for mining exploration. The aim of this study is to analyze these data in order to establish a new structural map and identify potential uranium targets.

The metallogenic model of the Francevillian uranium helps us to link the presence of potential uranium deposits with the existence of magnetic anomalies. A multi-scale study is carried out in Fourier domain to explore sub-surface faults and the deep basement. The magnetic tensor acts as directional filtering and enables us to locate 2D structures.

To conclude, we gather the results in a structural map providing the structuralist new information regarding uranium deposits of economic interest.

Keywords :

Potential methods, Magnetic method, Magnetic anomaly, Superpotential, Tensor, Aeromagnetic prospecting, Uranium exploration, Franceville Basin